POLYNESIE – Série S – Juin 2000 – Exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, unité graphique 4cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle *f* l'application, qui, à tout nombre complexe *z* différent de $-2i$, associe :

$$Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$$

1. Si $z = x+iy$, *x* et *y* étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de *Z* en fonction de *x* et de *y*.

   On vérifiera que : $\Re e\left(Z\right) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+\left(y+2\right)^2}$.

   En déduire la nature de :

a. L'ensemble E des points *M* d'affixe *z*, tels que *Z* soit un réel ;

b. L'ensemble F des points *M* d'affixe *z* du plan, tels que *Z* soit un imaginaire pur éventuellement nul.

   Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle *A* et *B* les points d'affixes respectives $z_A = 2-i$ et $z_B = -2i$.

a. En remarquant que $Z = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

b. Calculer $\left|f(z)-1\right| \times \left|z+2i\right|$, et en déduire que les points *M'* d'affixe *Z*, lorsque le point *M* d'affixe *z* parcourt le cercle de centre *B* et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

Analyse

L'exercice explore le lien fort existant entre les complexes et la géométrie

Résolution

→ *Question 1.*

On utilise directement l'expression de $f(z)$ et on remplace la variable *z* par la forme algébrique $x+iy$. Pour $z\neq -2i$ il vient alors :

$$f(z)=\frac{z-2+i}{z+2i}=\frac{x+iy-2+i}{x+iy+2i}=\frac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)}$$

Classiquement, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur de façon à obtenir une nouvelle expression comportant un réel au dénominateur :

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)}=\frac{\left[(x-2)+i(y+1)\right]\left[x-i(y+2)\right]}{\left[x+i(y+2)\right]\left[x-i(y+2)\right]}\\&=\frac{\left[x(x-2)+(y+1)(y+2)\right]+i\left[x(y+1)-(x-2)(y+2)\right]}{x^2+(y+2)^2}\\&=\frac{x(x-2)+(y+1)(y+2)}{x^2+(y+2)^2}+i\frac{x(y+1)-(x-2)(y+2)}{x^2+(y+2)^2}\\&=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}+i\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}\end{aligned}$$

Il vient enfin :

$$\boxed{\Re e\big(f(z)\big)=\Re e(Z)=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}\text{ et }\Im m\big(f(z)\big)=\Im m(Z)=\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}}$$

→ *Question 1.a.*

Soit E l'ensemble des points *M* d'affixe *z*, tels que *Z* soit un réel.

On a : $Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}z\neq -2i\\ \Im m(Z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+iy\neq -2i\\ \dfrac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x,y)\neq(0,-2)\\ -x+2y+4=0\end{cases}$

L'équation $-x+2y+4=0$ est, dans le plan, l'équation cartésienne d'une droite. On constate que le point de coordonnées $(0,-2)$ appartient à cette droite puisque ses coordonnées en vérifient l'équation. Or ce point ne peut appartenir à E puisque pour l'affixe $z=-2i$, $f(z)$ n'est pas définie. En d'autres termes :

L'ensemble E recherché est la droite d'équation cartésienne $-x+2y+4=0$ privée du point de coordonnées $(0,-2)$.

→ *Question 1.b.*

Soit F l'ensemble des points *M* d'affixe *z* du plan, tels que *Z* soit un imaginaire pur éventuellement nul.

On a :

$$Z \in \mathbb{C}/\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -2i \\ \Re e(Z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+iy \neq -2i \\ \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}=0 \end{cases}$$

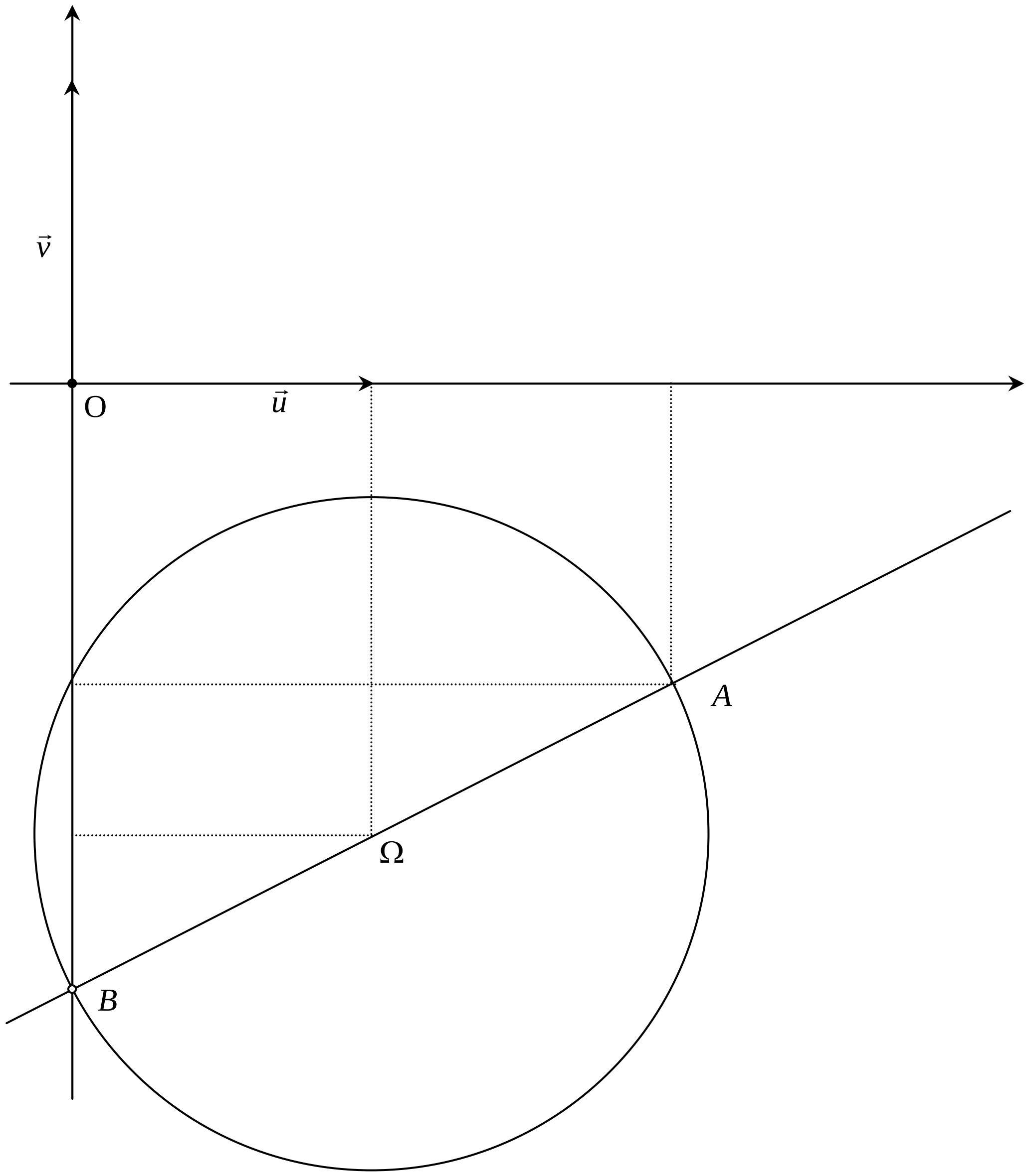
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)\neq(0,-2) \\ x^2+y^2-2x+3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)\neq(0,-2) \\ (x-1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

L'équation $(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ est, dans le plan, l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$. On constate que le point de coordonnées $(0,-2)$ appartient à ce cercle puisque ses coordonnées en vérifient l'équation. Or ce point ne peut appartenir à F puisque pour l'affixe $z=-2i$, $f(z)$ n'est pas définie. En d'autres termes :

L'ensemble F recherché est le cercle d'équation cartésienne $(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ privé du point de coordonnées $(0,-2)$.

→ *Question 1.c.*

Pour représenter les ensembles E et F, on peut utiliser le point de coordonnées $(0,-2)$ même si l'on a noté ci-dessus que, dans le cadre de cet exercice, il n'appartenait ni à E, ni à F.



→ *Question 2.*

On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.

Dans la première question, nous avons travaillé avec la partie réelle et la partie imaginaire de Z obtenues en déterminant sa forme algébrique. Ici, nous allons utiliser l'égalité : $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$.

Ainsi, on a : Z réel si, et seulement si, z est différent de –2i et $\arg Z = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Or, $\arg Z = \arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z}{z_B - z}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$ où $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$ désigne l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$.

On a donc : $\arg Z = k\pi$ si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = k\pi$, c'est à dire si les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires. En d'autres termes, $\arg Z = k\pi$ si, et seulement si, les point *A*, *B* et *M* sont alignés. En tenant compte de la condition $z \neq -2i$ qui nous conduit à éliminer le point *B*, on en déduit que l'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que *Z* soit un réel est la droite *AB* privée du point *B*.

Comme on a : $A\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}0\\-2\end{vmatrix}$, il vient : $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-2\\-1\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix}x-2\\y+1\end{vmatrix}$. L'équation cartésienne de la droite AB est alors donnée par : $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} \Leftrightarrow x-2 = 2y+2 \Leftrightarrow \boxed{-x+2y+4=0}$.

On retrouve bien le résultat obtenu à la question 1.a.

On souhaite maintenant que *Z* soit un imaginaire pur, éventuellement nul. En procédant comme précédemment, on a : *Z* imaginaire pur si, et seulement si, *z* est différent de –2i et $\arg Z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Or, $\arg Z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, c'est à dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont orthogonaux. En d'autres termes, on souhaite que le triangle *MAB* soit rectangle en *M*. On sait (voir cours) qu'une telle condition fournit le cercle dont le centre est le milieu du segment $[A, B]$ et le rayon la moitié de la longueur de ce segment (c'est à dire : $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$).

Soit *I* le milieu du segment $[A, B]$. Comme on a : $A\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}0\\-2\end{vmatrix}$, il vient $I\begin{vmatrix}\dfrac{2+0}{2}=1\\\dfrac{-2-1}{2}=-\dfrac{3}{2}\end{vmatrix}$.

On retrouve bien les coordonnées du point Ω obtenu à la question 1 : $I = \Omega$.

Pour ce qui est du rayon, on a : $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-2\\-1\end{vmatrix}$ et donc : $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Enfin, la condition $z \neq -2i$ conduit à éliminer le point *B*. On retrouve ainsi, pour l'ensemble F, le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point *B*.

→ *Question 3.*

Pour $z \neq -2i$, on a :

$$\left|f(z)-1\right| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}-1\right| = \left|\frac{z-z_A-(z-z_B)}{z-z_B}\right| = \left|\frac{z_B-z_A}{z-z_B}\right| = \frac{\left|z_B-z_A\right|}{\left|z-z_B\right|}$$

Par ailleurs : $\left|z+2i\right| = \left|z-z_B\right|$.

On a donc : $\left|f(z)-1\right| \times \left|z-z_B\right| = \left|z-z_B\right| \times \dfrac{\left|z_B-z_A\right|}{\left|z-z_B\right|} = \left|z_B-z_A\right| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{5}$ (1)

On suppose maintenant que le point *M* d'affixe *z* parcourt le cercle de centre *B* (d'affixe $-2i$) et de rayon $\sqrt{5}$. Un point quelconque de ce cercle vérifie donc : $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \sqrt{5}$ (et réciproquement, tout point *M* vérifiant cette égalité est un point du cercle considéré). Or on a simplement : $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left|z-z_B\right|$ puisque l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$ est le complexe $z-z_B$.
Le cercle considéré est donc l'ensemble des points *M* vérifiant : $\left|z-z_B\right| = \sqrt{5}$.

D'après la relation (1) obtenue précédemment, les affixes de ces points vérifient alors :

$$\left|f(z)-1\right| \times \left|z-z_B\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|f(z)-1\right| \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|f(z)-1\right| = 1$$

La dernière égalité traduit simplement le fait que les points *M'* d'affixe *Z* appartiennent au cercle de centre *C* d'affixe 1 et de rayon 1.