Définition et premiers exemples

Une « inéquation du second degré à une inconnue » est une inéquation qui peut se mettre sous l'une des quatre formes suivantes :

$$ax^2+bx+c>0$$
$$ax^2+bx+c\geq 0$$
$$ax^2+bx+c<0$$
$$ax^2+bx+c\leq 0$$

avec $a\neq 0$.

Dans certains cas, on sait résoudre ce genre d'inéquations :

Exemple N°1. Résoudre l'inéquation : $4x^2+28x+49>0$

On constate que : $4x^2+28x+49=(2x+7)^2$

Or, pour tout réel *x*, on a : $(2x+7)^2\geq 0$ et, plus précisément : $(2x+7)^2=0$ uniquement pour $x=-\frac{7}{2}$.

On en déduit l'ensemble des solutions de cette équations : $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{7}{2}\right[\cup\left]-\frac{7}{2};+\infty\right[$

Exemple N°2. Résoudre l'inéquation : $2x^2-9x\leq 0$

L'inéquation est équivalente à : $x(2x-9)\leq 0$.

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
x		-	0	+	|	+	
$2x-9$		-	|	-	0	+	
$x(2x-9)$		+	0	-	0	+	

En tenant compte du fait que l'inégalité de l'inéquation est une inégalité large, il vient alors :

$$\mathcal{S}=\left[0;\frac{9}{2}\right]$$

Les exemples précédents nous permettent de faire deux observations :

- Pour résoudre une inéquation du second degré, il convient de savoir déterminer le signe d'un trinôme du second degré ;
- La détermination du signe d'un trinôme du second degré est d'autant plus aisée qu'on a pu, si cela est possible, le factoriser.

Ces deux observations conduisent naturellement à la partie suivante.

Signe d'un trinôme du second degré

On considère une fonction *f* définie par :

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad \text{(avec } a \neq 0\text{)}$$

Ici encore, nous allons utiliser la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ pour déterminer le signe de $f(x)$.

On rappelle (mise sous forme canonique) que l'on a : $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- $\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : } \Delta < 0}$

  Dans ce cas, on a : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$. D'où : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

  Finalement le signe du produit : $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ est celui de *a*.

- $\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas : } \Delta = 0}$

  Dans ce cas, on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

  Comme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, on en déduit que le signe de $ax^2 + bx + c$ est ici encore identique à celui de *a*.

  Seule différence par rapport au cas précédent : le trinôme s'annule pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- $\boxed{3^{\text{ème}} \text{ cas : } \Delta > 0}$

  Dans ce cas, on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

  Le trinôme a été factorisé et on peut étudier le signe de $f(x)$ en dressant un tableau de signe (voir page suivante).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Remarque : nous avons placé dans ce tableau les deux racines x_1 et x_2 sans plus de précision. Sans la connaissance du signe de *a*, on ne peut pas comparer $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple : résoudre l'inéquation : $-2x^2 - x + 10 > 0$

Le discriminant Δ vaut : $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-2)\times 10 = 1+80 = 81 = 9^2$.
Le trinôme $-2x^2 - x + 10$ s'annule donc pour :

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+9}{2\times(-2)} = -\frac{10}{4} = \boxed{-\frac{5}{2}} \text{ et } \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-9}{2\times(-2)} = \frac{8}{4} = \boxed{2}$$

a. Sur $\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup]2;+\infty[$ le trinôme $-2x^2 - x + 10$ ne s'annule pas et est du signe de *a* (-2) : il prend donc des valeurs strictement négatives ;

b. Sur $\left]-\frac{5}{2};2\right[$ le trinôme $-2x^2 - x + 10$ ne s'annule pas et est du signe de $-a$: il prend donc des valeurs strictement positives ;

c. Pour $-\frac{5}{2}$ et 2, le trinôme $-2x^2 - x + 10$ s'annule.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x^2 - x + 10 > 0$ s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{5}{2};2\right[}$$

Remarque : à titre de vérification partielle (seulement !), on peut considérer une valeur simple de l'ensemble obtenu et calculer son image par la fonction *f*.
Par exemple ici, on peut considérer $x = 0$. Il vient alors : $f(0) = -2\times 0 - 0 + 10 = 10$.
On a bien $f(0) > 0$.

Synthèse

Discriminant	Signe de $ax^2 + bx + c$
$\Delta < 0$	Signe de a (le trinôme ne s'annule pas)
$\Delta = 0$	Signe de a (le trinôme s'annule pour $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$)
$\Delta > 0$	Le trinôme $ax^2 + bx + c$: • Est du signe de a à l'extérieur des racines ; • Est du signe opposé de celui de a à l'intérieur des racines ; • S'annule pour les deux valeurs suivantes : $x_1 = \dfrac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$