Déterminer le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 3 de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \arctan x$$

Analyse

On pense classiquement à se ramener à un développement limité à l'origine en posant $h = \frac{1}{x}$.

On doit alors utiliser une propriété classique de la fonction arctan pour pouvoir simplifier l'expression de f (en fonction de h) et amorcer le calcul …

Résolution

On pose donc : $h = \frac{1}{x}$.

On utilise alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, soit : $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan h$.

Ainsi : $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \arctan x = e^h \left(\frac{\pi}{2} - \arctan h \right) = g(h)$.

Le DL de l'exponentielle à l'origine à n'importe quel ordre est connu. A l'ordre 3, il s'écrit :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\left(h^3\right)$$

Pour ce qui est de la fonction arctan, on considère classiquement sa dérivée $h \mapsto \frac{1}{1+h^2}$ qui admet un DL à l'origine à n'importe quel ordre et que l'on développe à l'ordre 2 afin d'obtenir un DL de arctan à l'ordre 3. Il vient immédiatement, à l'origine :

$$\frac{1}{1+h^2} = 1 - h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)$$

En tenant compte de $\arctan 0 = 0$, on obtient : $\arctan h = h - \frac{1}{3}h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right)$ et enfin :

$$\frac{\pi}{2} - \arctan h = \frac{\pi}{2} - h + \frac{1}{3}h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right)$$

On peut alors effectuer le produit :

$$\begin{aligned}
e^h\left(\frac{\pi}{2}-\arctan h\right) &= \left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\times\left(\frac{\pi}{2}-h+\frac{1}{3}h^3+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{2}-h+\frac{1}{3}h^3+h\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+\frac{h^3}{6}\times\frac{\pi}{2}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\\
&= \frac{\pi}{2}-h+\frac{1}{3}h^3+\frac{\pi}{2}h-h^2+\frac{\pi}{4}h^2-\frac{1}{2}h^3+\frac{\pi}{12}h^3+\mathrm{o}\left(h^3\right)\\
&= \frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)h+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)h^2+\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\right)h^3+\mathrm{o}\left(h^3\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}\arctan x=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{1}{x}+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\frac{1}{x^2}+\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Résultat final

Le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 3 de :

$$f:x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\arctan x$$

s'écrit :

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{1}{x}+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\frac{1}{x^2}+\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$