Formulaire PanaMaths
→ Trigonométrie hyperbolique

Définitions

$\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
$\tanh(x)=\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$\coth(x)=\dfrac{1}{\tanh(x)}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Ensembles de définition

Fonction	**Ensemble de définition**
sinh	$\mathbb{R}$
cosh	$\mathbb{R}$
tanh	$\mathbb{R}$
coth	$\mathbb{R}^*$

Relations découlant directement des définitions

$$\cosh(x)+\sinh(x)=e^x$$
$$\cosh(x)-\sinh(x)=e^{-x}$$

Parité

$$\cosh(-x)=\cosh(x)$$
$$\sinh(-x)=-\sinh(x)$$
$$\tanh(-x)=-\tanh(x)$$
$$\coth(-x)=-\coth(x)$$

Relations entre les fonctions hyperboliques

Relation fondamentale

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$

Relation entre le cosinus et la tangente hyperboliques

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{1 - \tan^2(x)}$$

Relation entre le sinus et la cotangente hyperboliques

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{\coth^2(x) - 1}$$

Argument somme ou différence

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$$
$$\tanh(x-y) = \frac{\tanh(x) - \tanh(y)}{1 - \tanh(x)\tanh(y)}$$
$$\coth(x+y) = \frac{1 + \coth(x)\coth(y)}{\coth(x) + \coth(y)}$$
$$\coth(x-y) = \frac{1 - \coth(x)\coth(y)}{\coth(x) - \coth(y)}$$

Cas particulier : $x = y$

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) = \frac{2\tanh(x)}{1 - \tanh^2(x)}$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1 = 2\sinh^2(x) + 1 = \frac{1 + \tanh^2(x)}{1 - \tanh^2(x)}$$
$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$
$$\coth(2x) = \frac{1 + \coth^2(x)}{2\coth(x)}$$

Argument multiple

$$\cosh(nx)+\sinh(nx)=\left(\cosh(x)+\sinh(x)\right)^n=e^{nx}$$

$$\cosh(nx)=\cosh^n(x)+C_n^2\cosh^{n-2}(x)\sinh^2(x)+C_n^4\cosh^{n-4}(x)\sinh^4(x)-\ldots$$

$$\sinh(nx)=C_n^1\cosh^{n-1}(x)\sinh(x)+C_n^3\cosh^{n-3}(x)\sinh^3(x)+\ldots$$

$$\tanh(nx)=\frac{C_n^1\tanh(x)+C_n^3\tanh^3(x)+C_n^5\tanh^5(x)+\ldots}{1+C_n^2\tanh^2(x)+C_n^4\tanh^4(x)+C_n^6\tanh^6(x)+\ldots}$$

$$\coth(nx)=\frac{\coth^n(x)+C_n^2\coth^{n-2}(x)+C_n^4\coth^{n-4}(x)+C_n^6\coth^{n-6}(x)+\ldots}{C_n^1\coth^{n-1}(x)+C_n^3\coth^{n-3}(x)+C_n^5\coth^{n-5}(x)+\ldots}$$

Cas particulier : $n=3$

$$\sinh(x)=3\cosh^2(x)\sinh(x)+\sinh^3(x)=4\sinh^3(x)+3\sinh(x)$$

$$\cosh(x)=\cosh^3(x)+3\sinh^2(x)\cosh(x)=4\cosh^3(x)-3\cosh(x)$$

$$\tanh(3x)=\frac{3\tanh(x)+\tanh^3(x)}{1+3\tanh^2(x)}$$

$$\coth(3x)=\frac{3\coth(x)+\coth^3(x)}{1+3\coth^2(x)}$$

Transformation des sommes

$$\sinh(x)+\sinh(y)=2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sinh(x)-\sinh(y)=2\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cosh(x)+\cosh(y)=2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cosh(x)-\cosh(y)=2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tanh(x)+\tanh(y)=\frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x)\cosh(y)}$$
$$\tanh(x)-\tanh(y)=\frac{\sinh(x-y)}{\cosh(x)\cosh(y)}$$

$$\coth(x)+\coth(y)=\frac{\sinh(x+y)}{\sinh(x)\sinh(y)}$$
$$\coth(x)-\coth(y)=\frac{\sinh(x-y)}{\sinh(x)\sinh(y)}$$

Transformation des produits

$$\sinh(x)\sinh(y)=\frac{1}{2}\left(\cosh(x+y)-\cosh(x-y)\right)$$
$$\cosh(x)\cosh(y)=\frac{1}{2}\left(\cosh(x+y)+\cosh(x-y)\right)$$
$$\sinh(x)\cosh(y)=\frac{1}{2}\left(\sinh(x+y)+\sinh(x-y)\right)$$
$$\tanh(x)\tanh(y)=\frac{\cosh(x+y)-\cosh(x-y)}{\cosh(x+y)+\cosh(x-y)}$$
$$\coth(x)\coth(y)=\frac{\cosh(x+y)+\cosh(x-y)}{\cosh(x+y)-\cosh(x-y)}$$

Expressions en fonction de l'angle moitié

Avec la simplification d'écriture : $t=\tanh\left(\frac{x}{2}\right)$, on a :

$$\cosh(x)=\frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \tanh(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\sinh(x)=\frac{2t}{1-t^2} \qquad \text{cotan}(x)=\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right)$$