Synthèse de cours PanaMaths
→ Fonctions dérivables convexes

Définitions et exemples fondamentaux

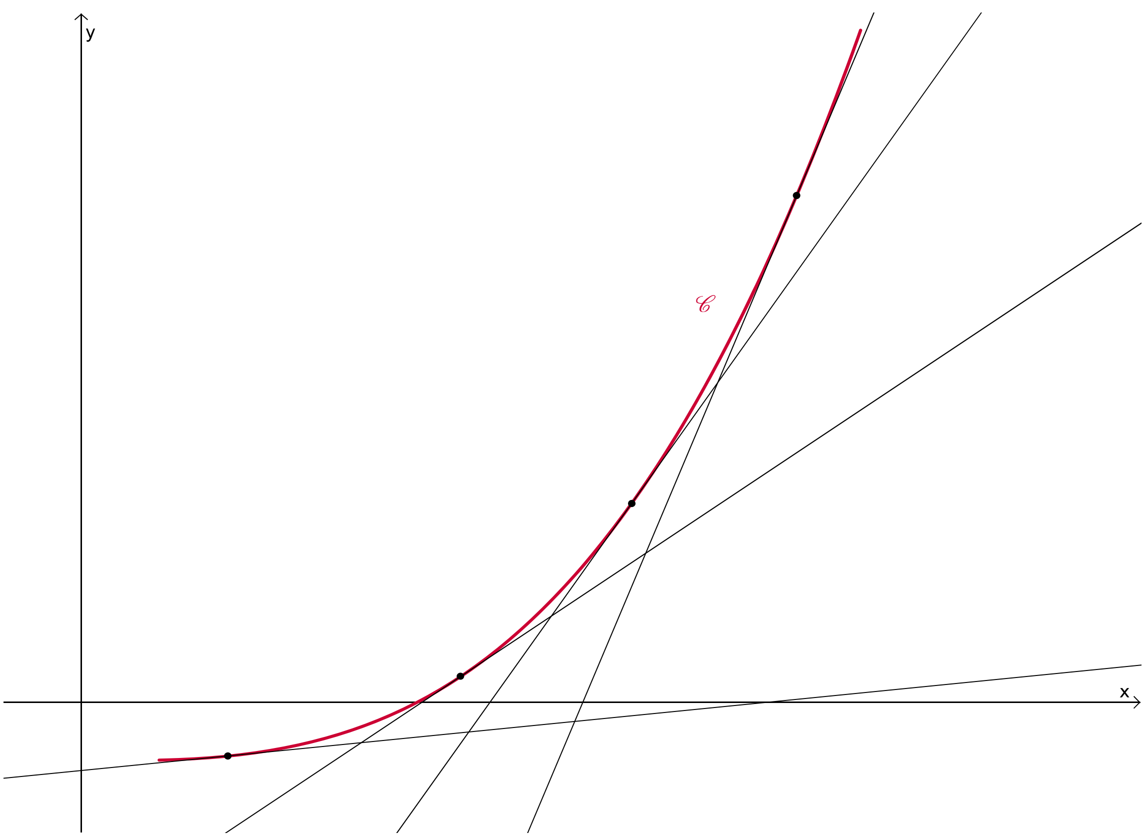
Définitions

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

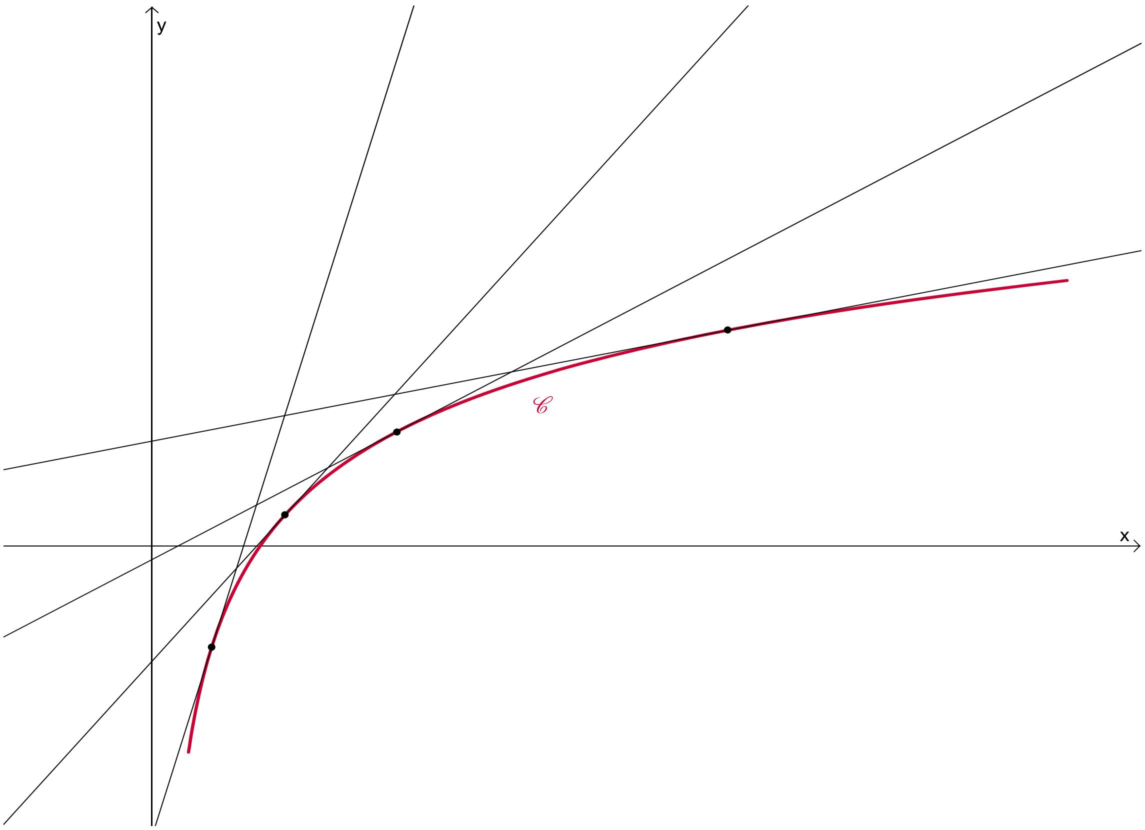
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère tel que l'axe des ordonnées est orienté du bas vers le haut.

La fonction f est dite « convexe sur l'intervalle I » (respectivement « concave sur l'intervalle I ») si pour tout point M de $\mathscr{C}$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est située au-dessus (respectivement en dessous) de la tangente passant par M.

Cas d'une fonction convexe :



Cas d'une fonction concave



Remarques :

❶ Etudier la convexité d'une fonction sur un intervalle donné c'est déterminer si la fonction considérée est convexe ou concave sur l'intervalle considéré. Dans la mesure où elle peut n'être ni convexe, ni concave, on pourra être amené à préciser des sous-intervalles de l'intervalle considéré sur lesquels la fonction est convexe ou concave.

Par exemple, en étudiant la convexité de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, on conclut que celle-ci est :

- concave sur $\mathbb{R}_-$;
- convexe sur $\mathbb{R}_+$.

❷ Les seules fonctions à la fois convexes et concaves sur un intervalle donné sont les fonctions affines.

Quelques exemples fondamentaux

Fonctions convexes

- Toute fonction de la forme $x \mapsto x^n$ où *n* est un entier naturel non nul est convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}$ lorsque *n* est pair).
- La fonction inverse est convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Plus généralement, toute fonction de la forme $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où *n* est un entier naturel non nul est convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Fonctions concaves

- La fonction racine carrée est concave sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
- La fonction inverse est concave sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
- La fonction logarithme népérien est concave sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : ce qui précède n'est pas à apprendre par cœur ! La connaissance des fonctions de référence, en particulier la forme de leurs courbes représentatives doit permettre de retrouver rapidement leur convexité sur tel ou tel intervalle.

Deux cas particuliers

Avec la fonction exponentielle

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est : $y = x+1$. La fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$, on en déduit l'inégalité fondamentale : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1$. Mais comme $x+1 > x$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$$

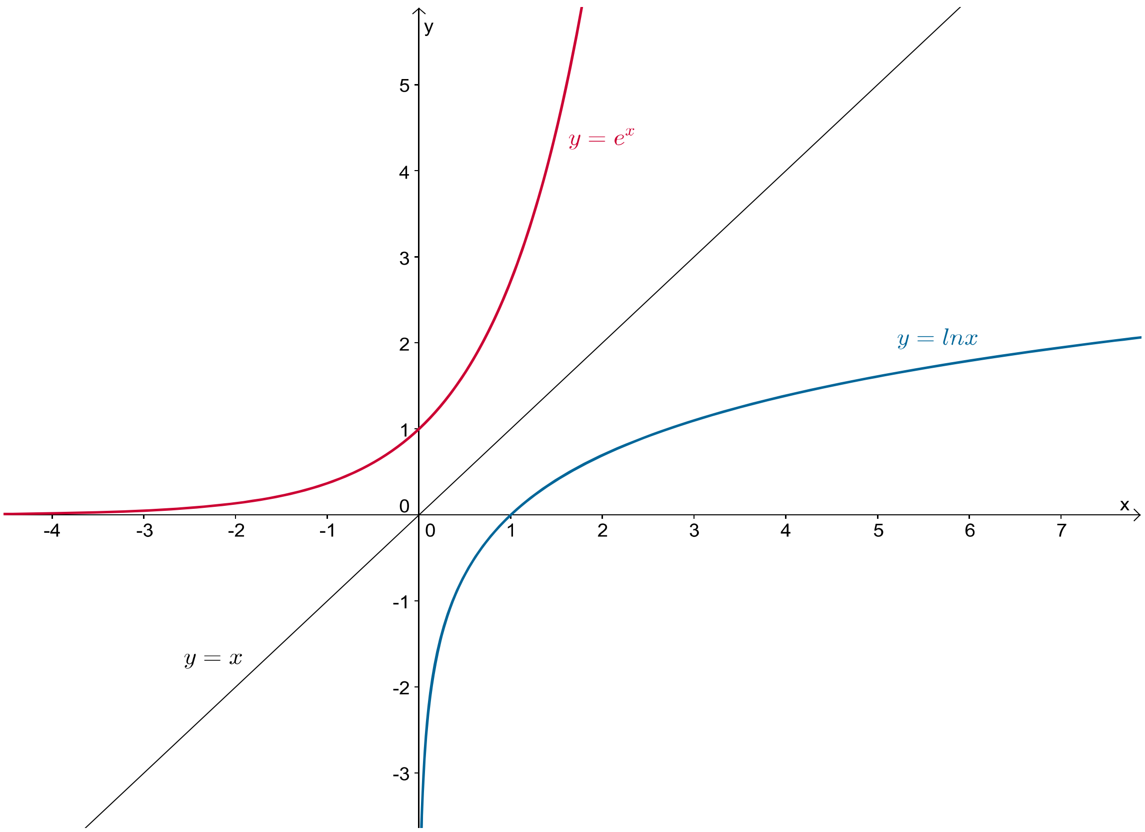
Avec la fonction logarithme népérien

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse 1 est : $y = x-1$. La fonction logarithme népérien étant concave sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit l'inégalité fondamentale : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x-1$. Mais comme $x-1 < x$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x < x$$

Interprétation graphique

Dans un repère dont l'axe des ordonnées est orienté vers le haut, la courbe représentative de la fonction exponentielle est située au-dessus de la courbe représentative de la fonction identité ($x \mapsto x$), elle-même située au-dessus de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien :



Caractérisations à l'aide de la dérivée

Théorème

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

La fonction f est convexe (respectivement concave) sur l'intervalle I si, et seulement si, la fonction f' est croissante (respectivement décroissante) sur I.

Cas où la fonction est deux fois dérivable

Définition

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

On dit que « la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle I » si la fonction dérivée f' est dérivable sur I.

Lorsqu'elle existe, la fonction dérivée de la fonction f' est notée « f'' » ou « $f^{(2)}$ ».

Théorème

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et deux fois dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

La fonction f est convexe (respectivement concave) sur l'intervalle I si, et seulement si, la fonction f'' est positive (respectivement négative) sur I.

Point d'inflexion

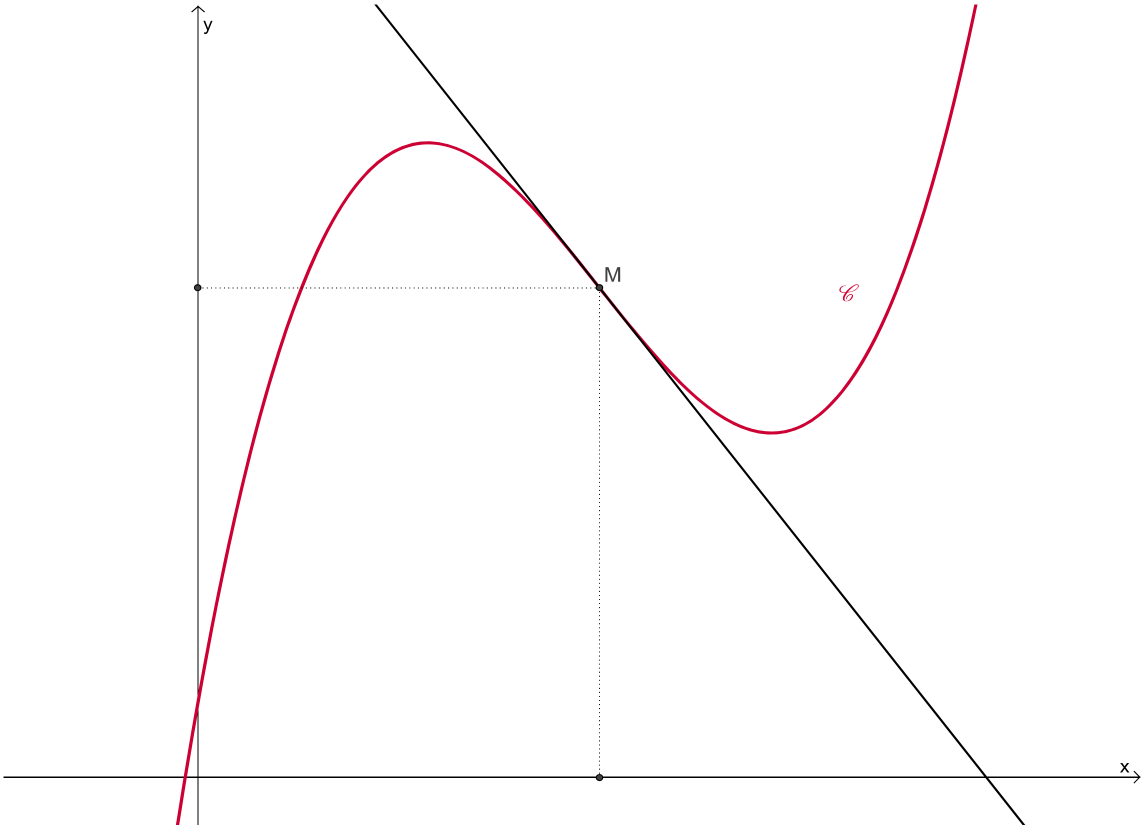
Définition

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

On dit que « la fonction f admet un point d'inflexion en un point M de $\mathscr{C}$ » si la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en M.

Remarque : la convexité de la fonction s'inverse au « passage par ce point » (cf. la courbe ci-après).



Sur cet exemple, la fonction *f* est concave à gauche de M et convexe à droite.

Exemple fondamental

La fonction $x \mapsto x^3$ admet un point d'inflexion à l'origine.
Elle est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Caractérisations à l'aide de la dérivée

Théorème

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

La fonction *f* admet un point d'inflexion en $\mathrm{M}\left(a\,;\,f\left(a\right)\right)$ si, et seulement si, la fonction dérivée $f\,'$ de la fonction *f* admet un extremum pour $x = a$.

Cas d'une fonction deux fois dérivable

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et deux fois dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

La fonction f admet un point d'inflexion en $\mathrm{M}\left(a\ ;\ f(a)\right)$ si, et seulement si, la fonction dérivée seconde f'' de la fonction f s'annule en changeant de signe pour $x = a$.