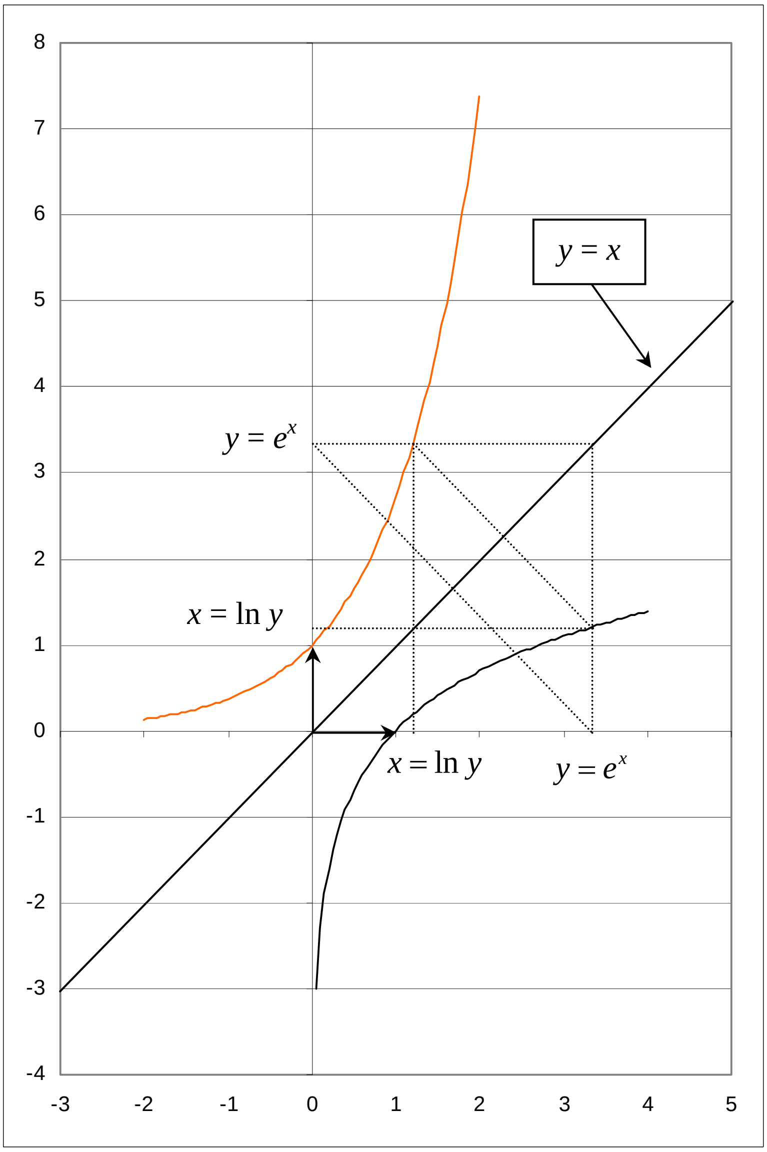
Synthèse de cours PanaMaths (Terminale S)
→ La fonction exponentielle

Théorème-définition

La fonction exponentielle (voir la courbe représentative en orange ci-dessous), notée « exp », est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Pour tout réel *x*, on écrit : $\exp(x) = e^x$ (on lit « exponentielle *x* » ou « exponentielle de *x* »).



Remarque : dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (1ère bissectrice).

Propriétés découlant de la définition

- $e^0 = 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$;
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

Propriétés algébriques

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x e^y$;

  On peut généraliser ce résultat à l'exponentielle d'une somme de n réels :
  $$e^{x_1+x_2+\ldots+x_n} = e^{x_1}e^{x_2}\ldots e^{x_n}$$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(e^x\right)^n = e^{nx}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{e^x}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Remarque : on retrouve fondamentalement les propriétés des puissances d'exposants relatifs (mais ici l'exposant est réel !).

Etude de la fonction exponentielle

Ensemble de définition

$$\boxed{D_{\exp} = \mathbb{R}}$$

Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp(x)$$

Sens de variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Composée de l'exponentielle et d'une fonction dérivable

Dans ce qui suit, f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Dérivée

La fonction composée $\exp o f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I,\ (\exp o f)'(x) = \left(e^f\right)'(x) = f'(x) \times e^{f(x)}$$

On retiendra : $\left(e^f\right)' = f' \times e^f$.

Primitives

La fonction $f'.(\exp o f)$ est intégrable sur l'intervalle I et ses primitives sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto e^{f(x)} + C$$
où C est une constante réelle quelconque.