Continuité et théorème des valeurs intermédiaires.

(hors fonction exponentielle)

Corrigés d'exercices / Version d'août 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 71 :	N°1**8**	Page 82 :	N°**84**
Page 76 :	N°**58**	Page 83 :	N°**88**
Page 77 :	N°**60**, **68**	Page 84 :	N°**95**

N°18 page 71

La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Elle l'est donc, à fortiori, sur l'intervalle $[1;2]$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Elle l'est donc, à fortiori, sur l'intervalle $[1;2]$. Pour tout réel *x* de cet intervalle, on a :

$$f'(x) = 2\times 3x^2 - 3\times 2x = 6\left(x^2 - x\right) = 6x(x-1)$$

On en déduit immédiatement :

- Pour tout réel *x* dans $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$.
- Pour tout réel *x* dans $]0;1[$, $f'(x) < 0$.
- $f'(0) = f'(1) = 0$.

De fait, la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[1;2]$.

Enfin, on a :

$$f(1) = 2\times 1^3 - 3\times 1^2 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$$
$$f(2) = 2\times 2^3 - 3\times 2^2 - 1 = 16 - 12 - 1 = 3$$

Or, on a : $-2 < 0 < 3$.

On déduit des éléments précédents, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α unique dans l'intervalle $[1;2]$.

En tabulant la fonction *f* sur l'intervalle $[1\,;2]$ avec un pas de 10^{-1}, on obtient :

$$f(1,6) = -0,488 \text{ et } f(1,7) = 0,156$$

On en déduit alors : $1,6 < \alpha < 1,7$.

En tabulant la fonction *f* sur l'intervalle $[1,6\,;1,7]$ avec un pas de 10^{-2}, on obtient :

$$f(1,67) = -0,051\,774 \text{ et } f(1,68) = 0,016\,064$$

On en déduit alors : $1,67 < \alpha < 1,68$.

La fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 1$ s'annule une seule fois sur l'intervalle $[1\,;2]$ pour le réel α vérifiant $1,67 < \alpha < 1,68$.

N°58 page 76

La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Elle l'est donc, à fortiori, sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

Par ailleurs, on a :

$$f(-3) = (-3)^3 - 4\times(-3) + 2 = -27 + 12 + 2 = -13$$
$$f(3) = 3^3 - 4\times 3 + 2 = 27 - 12 + 2 = 17$$

Or, on a : $-13 < 1 < 17$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit :

La fonction *f* prend au moins une fois la valeur 1 sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

N°60 page 77

5 intervalles sont à prendre en considération : $[8\,;10]$, $[10\,;12,5]$, $[12,5\,;15]$, $[15\,;18]$ et $[18\,;20]$. Sur chacun de ces intervalles, d'après le tableau de variation, on peut affirmer que la fonction *f* est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut alors affirmer que :

- Sur l'intervalle $[8;10]$, la fonction *f* prendra une fois et une seul toutes les valeurs entre $f(10)=25$ et $f(8)=45$. Comme $50 \notin [25;45]$, la fonction *f* ne prendra donc pas la valeur 50.
- Sur l'intervalle $[10;12,5]$, la fonction *f* prendra une fois et une seul toutes les valeurs entre $f(10)=25$ et $f(12,5)=60$. Comme $25<50<60$, la fonction *f* prendra donc une fois exactement la valeur 50.
- Sur l'intervalle $[12,5;15]$, la fonction *f* prendra une fois et une seul toutes les valeurs entre $f(15)=35$ et $f(12,5)=60$. Comme $35<50<60$, la fonction *f* prendra donc une fois exactement la valeur 50.
- Sur l'intervalle $[15;18]$, la fonction *f* prendra une fois et une seul toutes les valeurs entre $f(15)=35$ et $f(18)=70$. Comme $35<50<70$, la fonction *f* prendra donc une fois exactement la valeur 50.
- Sur l'intervalle $[18;20]$, la fonction *f* prendra une fois et une seul toutes les valeurs entre $f(20)=55$ et $f(18)=70$. Comme $50 \notin [55;70]$, la fonction *f* prendra donc une fois exactement la valeur 50.

En définitive :

- La vitesse du vent atteint et dépasse 50km/h une première fois entre 10h et 12h30 : le drapeau orange est hissé une première fois.
- La vitesse du vent retombe sous les 50km/h une première fois entre 12h30 et 15h : le drapeau orange est descendu une première fois.
- La vitesse du vent atteint et dépasse 50km/h une deuxième fois entre 15h et 18h : le drapeau orange est hissé une deuxième fois.
- A partir de là, la vitesse du vent ne repasse pas sous 50km/h jusqu'à 20h : me drapeau orange est maintenu hissé.

Dans la journée, le drapeau orange sera hissé deux fois et redescendu une fois.

N°68 page 77

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $[1;3]$ par :

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{2x-1}$$

Remarque : la seule valeur interdite pour *f* est $\frac{1}{2}$ qui annule son dénominateur.

Cette valeur n'appartenant pas à l'intervalle $[1;3]$, la fonction *f* est bien définie pour toute valeur de cet intervalle.
La fonction *f* est continue sur l'intervalle $[1;3]$ en tant que fonction rationnelle.

Elle y est également dérivable pour la même raison et on a :

$$f'(x)=\frac{1\times(2x-1)-2\times(x+1)}{(2x-1)^2}=\frac{-3}{(2x-1)^2}$$

La dérivée de la fonction *f* prenant des valeurs strictement négative sur l'intervalle $[1;3]$, la fonction *f* y est strictement décroissante.

Enfin, on a :

$$f(1)=\frac{1+1}{2\times1-1}=\frac{2}{2-1}=2$$
$$f(3)=\frac{3+1}{2\times3-1}=\frac{4}{5}=0,8$$

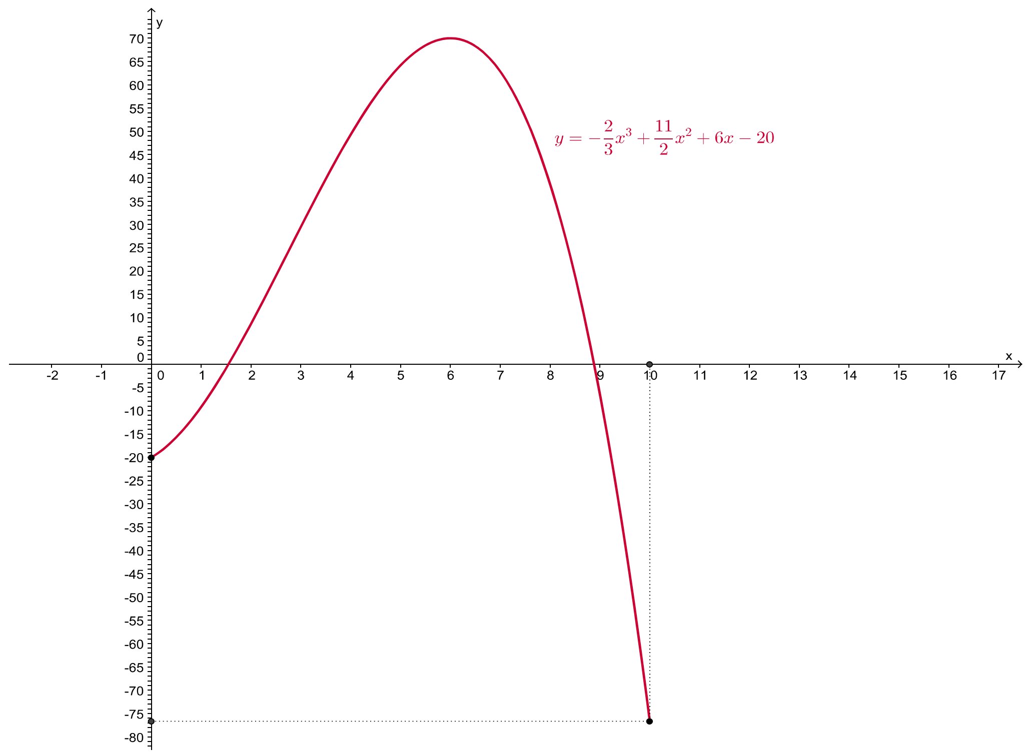
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f prendra donc une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left[\frac{4}{5};2\right]$. Comme 1 appartient à cet intervalle, on en déduit finalement :

L'équation $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}=1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;3]$.

N°84 page 82

1. Conjecture

a) On a :



b) L'activité de l'entreprise est rentable pour toute valeur de *x* telle que $f(x)$ est strictement supérieur à 0.

Par lecture graphique, on a : $f(x)>0 \Leftrightarrow 1,5<x<8,9$.

On peut conjecturer que l'activité de l'entreprise est rentable pour une production comprise entre 1500 et 8900 unités.

2. Démonstration

1. La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Elle l'est donc à fortiori sur l'intervalle $[0;10]$ et on a :

$$f'(x)=-\frac{2}{3}\times 3x^2+\frac{11}{2}\times 2x+6\times 1+0=-2x^2+11x+6$$

Le discriminant Δ associé au trinôme $-2x^2+11x+6$ est égal à :

$$\Delta = 11^2 - 4\times(-2)\times 6 = 121+48 = 169 = 13^2$$

Le trinôme $-2x^2+11x+6$ s'annule donc pour les valeurs :

$$x_1 = \frac{-11-\sqrt{169}}{2\times(-2)} = \frac{-11-13}{-4} = \frac{-24}{-4} = 6$$
$$x_2 = \frac{-11+\sqrt{169}}{2\times(-2)} = \frac{-11+13}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Comme le coefficient de « x^2 » est égal à -2, on a :

- Si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]6\,;+\infty\right[$ alors $-2x^2+11x+6<0$;
- Si $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=6$ alors $-2x^2+11x+6=0$;
- Si $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;6\right[$ alors $-2x^2+11x+6>0$.

Sur l'intervalle $[0\,;10]$ on a donc :

- Si $x\in[0\,;6[$ alors $-2x^2+11x+6>0$;
- Si $x=6$ alors $-2x^2+11x+6=0$;
- Si $x\in]6\,;10]$ alors $-2x^2+11x+6<0$.

On en déduit que la fonction *f* est :

- Strictement croissante sur l'intervalle $x\in[0\,;6]$.
- Strictement décroissante sur l'intervalle $x\in[6\,;10]$.

Pour pouvoir dresser le tableau de variation de la fonction f, il nous reste à évaluer $f(0)$, $f(6)$ et $f(10)$:

- $f(0) = -\frac{2}{3}\times 0^3 + \frac{11}{2}\times 0^2 + 6\times 0 - 20 = -20$;
- $f(6) = -\frac{2}{3}\times 6^3 + \frac{11}{2}\times 6^2 + 6\times 6 - 20 = -144+198+36-20 = 70$;
- $f(10) = -\frac{2}{3}\times 10^3 + \frac{11}{2}\times 10^2 + 6\times 10 - 20 = -\frac{2000}{3}+550+60-20 = -\frac{230}{3}$.

Finalement :

x	0		6		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-20	$\nearrow$	70	$\searrow$	$-\dfrac{230}{3}$

2. Le tableau de variation nous permet de conjecturer que l'on a $x_1 \in [0\,;6]$ et $x_2 \in [6\,;10]$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $[0\,;6]$ en tant que fonction polynôme.
D'après la question précédente, elle est strictement croissante sur cet intervalle.
On a enfin : $f(0) = -20 < 0$ et $f(6) = 70 > 0$.
On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction f prend, une fois et une seule, toutes les valeurs de l'intervalle $[-20\,;70]$.
En particulier, la fonction f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0\,;6]$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $[6\,;10]$ en tant que fonction polynôme.
D'après la question précédente, elle est strictement décroissante sur cet intervalle.
On a enfin : $f(6) = 70 > 0$ et $f(10) = -\dfrac{230}{3} < 0$.
On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction f prend, une fois et une seule, toutes les valeurs de l'intervalle $\left[-\dfrac{230}{3}\,;70\right]$.
En particulier, la fonction f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[6\,;10]$.

En définitive :

La fonction f s'annule pour deux valeurs x_1 (dans $[0\,;6]$) et x_2 (dans $[6\,;10]$) sur l'intervalle $[0\,;10]$.

3. Avec un tableur ou une calculatrice graphique, on obtient :

$$\boxed{x_1 \simeq 1,548 \text{ et } x_1 \simeq 8,883}$$

4. On a $f(1,548) < 0$ et $f(1,549) > 0$. Par ailleurs : $f(8,882) > 0$ et $f(8,883) < 0$.
On en déduit immédiatement, la variable x désignant des milliers d'unités vendues, que l'activité de l'entreprise sera rentable pour $1,549 \leq x \leq 8,882$, c'est-à-dire pour une production comprise entre 1 549 et 8 882 unités.

L'activité de l'entreprise sera rentable pour une production comprise entre 1 549 et 8 882 unités.

5. D'après la question 2.a), la fonction f admet un maximum pour $x = 6$.

On en déduit immédiatement que le bénéfice réalisé par l'entreprise sera maximale pour 6 000 unités vendues. Comme $f(6) = 70$, on en déduit également que bénéfice maximal s'élève à 70 000 euros.

Le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise s'élève à 70 000 euros. Il est réalisé pour 6 000 unités vendues.

N°88 page 83

La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$ en tant que fonction polynôme.
Pour tout *x* de l'intervalle $[-1\,;5]$ on a :

$$f'(x) = 0,25\times 4x^3 - 2\times 3x^2 + 5,995\times 2x - 7,98\times 1 = x^3 - 6x^2 + 11,99x - 7,98$$

Via le logiciel Xcas (par exemple), nous disposons d'une factorisation de cette fonction polynôme de degré 3 :

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11,99x - 7,98 = (x - 2,1)\times(x-2)\times(x-1,9)$$

En s'aidant éventuellement d'un tableau de signe, on obtient facilement le signe de $f'(x)$:

- Si $x \in [-1\,;1,9[$ alors $f'(x) < 0$.
- $f'(1,9) = 0$.
- Si $x \in]1,9\,;2[$ alors $f'(x) > 0$.
- $f'(2) = 0$.
- Si $x \in]2\,;2,1[$ alors $f'(x) < 0$.

- $f'(2,1) = 0$.
- Si $x \in]2,1\,;5]$ alors $f'(x) > 0$.

Ainsi, la fonction *f* est :

- Strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,;1,9]$.
- Strictement croissante sur l'intervalle $[1,9\,;2]$.
- Strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;2,1]$.
- Strictement croissante sur l'intervalle $[2,1\,;5]$.

Ces variations ne correspondent pas à celles conjecturées par Marion. On en conclut :

L'affirmation de Marion est erronée.

N°95 page 84

1. D'après le graphique fourni, la courbe représentative de la fonction *f* semble ne couper l'axe des abscisses qu'en un seul point. On peut donc conjecturer :

L'équation $f(x) = 0$ semble n'admettre qu'une solution sur $\mathbb{R}$.

2. Première méthode.

a) On a : $f(1) = 1^3 - 3,1\times 1^2 + 3,18\times 1 - 1,08 = 1 - 3,1 + 3,18 - 1,08 = 0$.

$$\boxed{f(1) = 0}$$

b) Puisque $f(1) = 0$, on peut poser $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
En développant cette expression factorisée, on obtient :

$$f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (-a+b)x^2 + (-b+c)x - c$$

En identifiant $ax^3 + (-a+b)x^2 + (-b+c)x - c$ et $x^3 - 3,1x^2 + 3,18x - 1,08$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = -3,1 \\ -b + c = 3,18 \\ -c = -1,08 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} a=1 \\ -a+b=-3,1 \\ -b+c=3,18 \\ -c=-1,08 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -1+b=-3,1 \\ -b+c=3,18 \\ c=1,08 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2,1 \\ -b+c=3,18 \\ c=1,08 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2,1 \\ c=1,08 \end{cases}$$

Ainsi : $f(x)=(x-1)\left(x^2-2,1x+1,08\right)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel, } f(x)=(x-1)\left(x^2-2,1x+1,08\right)}$$

c) Le discriminant Δ associé au trinôme $x^2-2,1x+1,08$ s'écrit :

$$\Delta=(-2,1)^2-4\times1\times1,08=4,41-4,32=0,09=0,3^2$$

On en déduit que l'équation $x^2-2,1x+1,08=0$ admet les deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-2,1)-\sqrt{0,09}}{2\times1}=\frac{2,1-0,3}{2}=\frac{1,8}{2}=0,9$$
$$x_2=\frac{-(-2,1)+\sqrt{0,09}}{2\times1}=\frac{2,1+0,3}{2}=\frac{2,4}{2}=1,2$$

On a donc : $x^2-2,1x+1,08=(x-0,9)(x-1,2)$ puis :

$$f(x)=(x-1)(x-0,9)(x-1,2)$$

On en déduit alors immédiatement :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } f(x)=0 \text{ est } \mathscr{S}=\{0,9\,;1\,;1,2\}.}$$

3. Deuxième méthode.

a) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout *x* réel, on a : $f'(x)=3\times x^2-3,1\times2x+3,18\times1=3x^2-6,2x+3,18$.

Le discriminant Δ associé au trinôme $3x^2-6,2x+3,18$ s'écrit :

$$\Delta=(-6,2)^2-4\times3\times3,18=38,44-38,16=0,28$$

On en déduit que l'équation $3x^2-6,2x+3,18=0$ admet les deux solutions (les valeurs approchées sont fournies à 10^{-3} près) :

$$x_1=\frac{-(-6,2)-\sqrt{0,28}}{2\times 3}=\frac{6,2-\sqrt{0,28}}{6}\simeq 0,945$$
$$x_2=\frac{-(-6,2)+\sqrt{0,28}}{2\times 3}=\frac{6,2+\sqrt{0,28}}{6}\simeq 1,122$$

Le coefficient de « x^2 » étant positif (il vaut 3), nous en déduisons :

- Si $x\in\left]-\infty\,;x_1\right[\cup\left]x_2\,;+\infty\right[$ alors $f'(x)>0$.
- Si $x\in\left]x_1\,;x_2\right[$ alors $f'(x)<0$.

On en déduit (ce n'est pas explicitement demandé dans cette question) que la fonction *f* est :

- Strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;x_1\right]$ et $\left[x_2\,;+\infty\right[$.
- Strictement décroissante sur l'intervalle $\left[x_1\,;x_2\right]$.

On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

Avec (valeurs arrondies à 10^{-6}) :

$$f(x_1)=f\left(\frac{6,2-\sqrt{0,28}}{6}\right)\simeq 0,000\,631$$
$$f(x_2)=f\left(\frac{6,2+\sqrt{0,28}}{6}\right)\simeq -0,002\,113$$

b) D'après la question précédente, on peut affirmer que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right[$. Par ailleurs, on a : $f(0)=-1,08$.

Il vient donc : $x<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<-1,08$.

On en déduit que la fonction *f* prend des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right[$. Elle ne s'y annule donc pas.

D'après la question précédente, on peut également affirmer que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]3\,;+\infty\right[$. Par ailleurs, on a : $f(3)=7,56$.

Il vient donc : $x>3 \Leftrightarrow f(x)>f(3) \Leftrightarrow f(x)>7,56$.

On en déduit que la fonction *f* prend des valeurs strictement positives sur l'intervalle $\left]3\,;+\infty\right[$. Elle ne s'y annule donc pas.

Finalement :

L'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur les intervalles $\left]-\infty\,;0\right[$ et $\left]3\,;+\infty\right[$.

c) Nous travaillons désormais sur l'intervalle $[0\,;3]$.

Sur l'intervalle $[0\,;x_1]$, la fonction *f* est continue (en tant que fonction polynôme) et strictement croissante. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction *f* prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left[f(0)\,;f(x_1)\right]$. Comme $f(0)$ et $f(x_1)$ sont de signes contraires, on a $0\in\left[f(0)\,;f(x_1)\right]$ et on en conclut finalement que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;x_1]$.

Sur l'intervalle $[x_1\,;x_2]$, la fonction *f* est continue (en tant que fonction polynôme) et strictement décroissante. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction *f* prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left[f(x_2)\,;f(x_1)\right]$. Comme $f(x_2)$ et $f(x_1)$ sont de signes contraires, on a $0\in\left[f(x_2)\,;f(x_1)\right]$ et on en conclut finalement que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[x_1\,;x_2]$.

Sur l'intervalle $[x_2\,;3]$, la fonction *f* est continue (en tant que fonction polynôme) et strictement croissante. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction *f* prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left[f(x_2)\,;f(3)\right]$. Comme $f(x_2)$ et $f(3)$ sont de signes contraires, on a

$0 \in \left[f\left(x_2\right) ; f\left(3\right) \right]$ et on en conclut finalement que l'équation $f\left(x\right) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[x_2 ; 3\right]$.

De l'étude précédente, nous déduisons :

L'équation $f\left(x\right) = 0$ admet 3 solutions sur l'intervalle $\left[0 ; 3\right]$.

On retrouve facilement $f\left(1\right) = 0$.
On déduit alors de la question b) et du résultat précédent :

L'équation $f\left(x\right) = 0$ admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$:

- Une solution dans l'intervalle $\left[0 ; x_1\right]$ avec $x_1 \simeq 0,945$;
- 1 ;
- Une solution dans l'intervalle $\left[x_2 ; 3\right]$ avec $x_2 \simeq 1,122$.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous la courbe représentative de la fonction f pour x compris entre 0,8 et 1,3. L'axe des ordonnées coupe intentionnellement l'axe des abscisses au point d'abscisse 0,8. Par ailleurs, les valeurs des coordonnées des points A_1 et A_2 sont des valeurs approchées à 10^{-5} près. Enfin, les échelles des deux axes sont différentes !