Raisonnement par récurrence

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 184 : N°**19**, **26**, **27**

N°19 page 184

1. Initialisation.

   Pour $n=1$, on a : $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

   Par ailleurs, on a :

   $$S_1=\sum_{p=1}^{1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{1\times(1+1)}=\frac{1}{2}.$$

   La propriété est bien vérifiée au rang 1.

   Hérédité.

   Soit *n* entier naturel quelconque non nul fixé.

   Supposons que l'on ait :

   $$S_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

   Intéressons-nous alors à : S_{n+1}.

   On a :

   $$S_{n+1}=\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=S_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

   Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

   $$S_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p\left(p+1\right)}=S_n+\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\\&=\frac{n\left(n+2\right)+1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\frac{n^2+2n+1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\frac{\left(n+1\right)^2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\\&=\frac{n+1}{n+2}\\&=\frac{n+1}{\left(n+1\right)+1}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Elle est donc héréditaire.

Conclusions générale :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p\left(p+1\right)}=\frac{n}{n+1}}$$

2. a) On a immédiatement, pour tout entier naturel p non nul :

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}=\frac{p+1}{p\left(p+1\right)}-\frac{p}{p\left(p+1\right)}=\frac{\cancel{p}+1-\cancel{p}}{p\left(p+1\right)}=\frac{1}{p\left(p+1\right)}$$

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p\left(p+1\right)}}$$

b) D'après ce qui précède, on a, pour tut entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p\left(p+1\right)}=\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)\\&=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+1}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p}\\&=\frac{1}{1}+\cancel{\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}}-\cancel{\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}\\&=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Si l'on n'est pas très familier avec les manipulations de « Σ », on peut également écrire :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on retrouve le résultat obtenu à la question 1.

$\boxed{\text{N°26 page 184}}$

Initialisation

On a : $u_0 = 0$.

Donc on a bien : $0 \le u_0 \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

Soit *n* quelconque fixé.

Supposons que l'on ait : $0 \le u_n \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On en tire alors immédiatement :

$$1 \le u_n + 1 \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

La fonction acine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient alors :

$$\sqrt{1} \le \sqrt{u_n + 1} \le \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1}$$

Soit :

$$1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}$$

Or, on a :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un réel positif, il vient : $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalement :

$$1 \leq u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Elle est donc héréditaire.

<u>Conclusion générale</u>

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Remarque : le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé « nombre d'or » et est noté φ (encore une sacrée constante mathématique …). C'est le seul réel positif solution de l'équation : $x^2=x+1$.

N°27 page 184

1. $u_1=1+\frac{1}{u_0}=1+\frac{1}{-\frac{3}{5}}=1-\frac{5}{3}=\boxed{-\frac{2}{3}}$

   $u_2=1+\frac{1}{u_1}=1+\frac{1}{-\frac{2}{3}}=1-\frac{3}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$

   $u_3=1+\frac{1}{u_2}=1+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=1-2=\boxed{-1}$

On obtient alors facilement $u_4 = 0$. Dans ces conditions, il n'est pas possible de calculer u_5 (et, bien sûr, les termes suivants …).

La suite (u_n) n'est pas définie.

2. a) Initialisation.

On a : $v_0 = 2$ et on a bien $\frac{3}{2} \leq 2 \leq 2$, c'est-à-dire : $\frac{3}{2} \leq v_0 \leq 2$.

Hérédité.

Soit alors n un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que l'on a : $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

On en tire alors : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{v_n} \leq \frac{2}{3}$, puis : $\frac{1}{2}+1 \leq \frac{1}{v_n}+1 \leq \frac{2}{3}+1$, soit : $\frac{3}{2} \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3}$.
Finalement : $\frac{3}{2} \leq v_{n+1} \leq 2$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Elle est héréditaire.

Conclusion générale.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$

b) D'après la question précédente, on peut affirmer que tous les termes de la suite (v_n) sont strictement positifs, donc non nuls..

La suite (v_n) est ainsi parfaitement définie.