CORRIGE

Exercice N°1

Démontrer (sans raisonnement par récurrence !) que pour tout entier naturel *n*, les nombres suivants sont divisibles par 2 et par 3 :

- $n^3 - n$.
- $n(n+1)(2n+1)$.

Une indication : tout entier naturel *n* est de la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ …

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$.

On a donc affaire au produit de 3 entiers naturels consécutifs.
L'un d'eux est donc nécessairement divisible par 3. Par ailleurs, le produit de deux entiers consécutifs étant pair, il en va de même, à fortiori, pour le produit de trois entiers consécutifs.
En définitive, $n^3 - n$ est bien divisible par 2 et par 3.

Considérons maintenant le produit $n(n+1)(2n+1)$.

Le produit $n(n+1)$ de deux entiers consécutifs est pair i.e. divisible par 2.

Pour la divisibilité par 3, l'énoncé suggère de raisonner selon la valeur du reste de la division euclidienne de *n* par 3.
Si $n = 3k$, on a : $n(n+1)(2n+1) = 3k(3k+1)(6k+1)$ qui est divisible par 3 (premier facteur).
Si $n = 3k+1$, on a :
$n(n+1)(2n+1) = (3k+1)(3k+2)(2(3k+1)+1) = (3k+1)(3k+2)(6k+3) = (3k+1)(3k+2)3(2k+1)$
qui est divisible par 3 (facteur $6k+3$).
Enfin, si Si $n = 3k+2$, on a :
$n(n+1)(2n+1) = (3k+2)(3k+3)(2(3k+2)+1) = (3k+2)3(k+1)(6k+5)$ qui est divisible par 3 (facteur $(3k+3)$).

Ainsi, dans tous les cas, le produit $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

En définitive, $n(n+1)(2n+1)$ est bien divisible par 2 et par 3.

Exercice N°2

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $2^{3n}-1$ est divisible par 7.
2. Déduire du résultat précédent que pour tout entier naturel *n*, $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont divisibles par 7.
3. Déduire des questions précédentes les restes possibles de la division euclidienne des puissances de 2 (d'exposants entiers naturels) par 7.

1. On considère $\mathscr{P}_n$: « $2^{3n}-1$ est divisible par 7.

   Initialisation
   Pour $n=0$, on a : $2^{3n}-1=2^{3\times 0}-1=2^0-1=1-1=0$ qui est bien divisible par 7.
   Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   Hérédité
   Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour *n* entier naturel quelconque fixé.
   On s'intéresse à $2^{3(n+1)}-1=2^{3n+3}-1=2^3\times 2^{3n}-1=8\times 2^{3n}-1$.
   On a : $8\times 2^{3n}-1=8\times\left(2^{3n}-1+1\right)-1=8\times\left(2^{3n}-1\right)+8-1=8\times\left(2^{3n}-1\right)+7$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $2^{3n}-1$ est divisible par 7. Il existe donc un entier *k* tel que : $2^{3n}-1=7k$.
   On a alors : $2^{3(n+1)}-1=8\times\left(2^{3n}-1\right)+7=8\times 7k+7=7\times(8k+1)$. Il s'agit bien d'un multiple de 7. Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   La propriété est héréditaire.

   Conclusion
   Pour tout *n* entier naturel, $2^{3n}-1$ est divisible par 7.
   Le résultat est établi.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel *n*, $2^{3n}-1$ est divisible par 7.
   On en déduit alors immédiatement que $2\times\left(2^{3n}-1\right)=2\times 2^{3n}-2=2^{3n+1}-2$ et
   $4\times\left(2^{3n}-1\right)=4\times 2^{3n}-2=2^2\times 2^{3n}-4=2^{3n+2}-4$ sont également divisibles par 7.
   Le résultat est établi.

3. On considère ici 2^N où *N* est un entier naturel.
   Dans la division euclidienne de *N* par 3, le reste peut être égal à 0, 1 ou 2.
   On a donc $N=3n$ ou $N=3n+1$ ou $N=3n+2$.
   Si $N=3n$, on sait, d'après la question 1, que $2^{3n}-1=7k$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de $2^N=2^{3n}$ par 7 est égal à 1.
   Si $N=3n+1$ (respectivement $N=3n+2$), on sait, d'après la question 2, que $2^{3n+1}-2=7k$ (resp. $2^{3n+2}-4=7k$). Ainsi, le reste de la division euclidienne de $2^N=2^{3n+1}$ (resp. $2^N=2^{3n+2}$) par 7 est égal à 2 (resp. 4).

Les restes possibles de la division euclidienne des puissances de 2 d'exposants entiers naturels par 7 sont donc 1, 2 ou 4.

Exercice N°3

Déterminer la division euclidienne de -371 par -9 :

- En utilisant la définition.
- En déterminant d'abord la division euclidienne de 371 par 9.

Par définition de la division euclidienne, il existe un unique couple d'entiers (q, r) tels que :

$$-371 = -9 \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < 9$$

L'égalité $-371 = -9 \times q + r$ donne : $r = 9q - 371$.
On a alors :

$$\begin{aligned} & 0 \leq r < 9 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq 9q - 371 < 9 \\ \Leftrightarrow\ & 371 \leq 9q < 380 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{371}{9} \leq q < \frac{380}{9} \end{aligned}$$

Or $\frac{371}{9} \simeq 41,2$ et $\frac{380}{9} \simeq 42,2$. Il vient donc : $q = 42$.
D'où : $r = 9q - 371 = 9 \times 42 - 371 = 7$.
Finalement :

$$\boxed{-371 = -9 \times 42 + 7}$$

371 est proche d'un multiple simple de 9 : 360.
On a donc : $371 = 360 + 11 = 9 \times 40 + 9 + 2 = 9 \times 41 + 2$.
Il en découle immédiatement : $-371 = -9 \times 41 - 2 = -9 \times 41 - 9 + 7 = -9 \times 42 + 7$.
On retrouve le résultat obtenu ci-dessus.

Exercice N°4

On considère deux entiers naturels *a* et *b* tels que :

- Le produit ab est égal à 511.
- Dans la division euclidienne de *a* par *b*, le quotient est égal à 10 et le reste à 3.

Déterminer *a* et *b*.

Une indication : $\sqrt{20\,449} = 143$ … ☺

La deuxième donnée de l'énoncé s'écrit : $a = 10b + 3$.

Or $ab = 511 \Leftrightarrow a = \frac{511}{b}$.

On a donc : $\frac{511}{b} = 10b + 3$, soit : $511 = 10b^2 + 3b$.

On doit donc résoudre : $10b^2 + 3b - 511 = 0$.

Le discriminant Δ vaut : $\Delta = 3^2 - 4 \times 10 \times (-511) = 9 + 4 \times 5110 = 9 + 20\,440 = 20\,449$.

On en déduit, en utilisant l'indication de l'énoncé, les deux racines :

$$b_1 = \frac{-3 - \sqrt{20\,449}}{2 \times 10} = \frac{-3 - 143}{20} = \frac{-146}{20} = -7,3$$

$$b_2 = \frac{-3 + \sqrt{20\,449}}{2 \times 10} = \frac{-3 + 143}{20} = \frac{140}{20} = 7$$

Seule la deuxième racine appartient à $\mathbb{N}$. On a donc : $b = b_2 = 7$.

Il vient alors : $a = \frac{511}{b} = \frac{511}{7} = 73$.

$$\boxed{a = 73 \text{ et } b = 7.}$$