L'inégalité de Bernoulli.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul *n* et tout réel supérieur ou égal à -1, on a :

$$(x+1)^n \geq nx+1$$

Analyse

Elle est classique et bien pratique. On peut la trouver sous diverses formes, l'inégalité pouvant, modulo une petite modification du champ d'application, être stricte. La forme proposée est obtenue grâce à un raisonnement par récurrence simple.

Résolution

Pour tout entier naturel non nul *n*, on pose :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « } \forall x \in [-1\,;+\infty[,\ (x+1)^n \geq nx+1 \text{ »}$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$, on a : $\forall x \in [-1\,;+\infty[,\ (x+1)^n = x+1$ et $\forall x \in [-1\,;+\infty[,\ nx+1 = x+1$.
L'inégalité (qui s'avère être une égalité dans ce cas) est donc bien vérifiée pour tout réel *x* supérieur ou égal à -1.
$\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *N* un entier naturel non nul quelconque fixé. On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie. On suppose donc que l'on a : $\forall x \in [-1\,;+\infty[,\ (x+1)^N \geq Nx+1$ (hypothèse de récurrence).
On veut montrer que $\mathscr{P}_{N+1}$, c'est-à-dire : $\forall x \in [-1\,;+\infty[,\ (x+1)^{N+1} \geq (N+1)x+1$.

Pour tout réel *x* supérieur ou égal à -1, on a : $x+1 \geq 0$ et donc :

$$(x+1)^N \geq Nx+1 \Rightarrow (x+1)^N \times (x+1) \geq (Nx+1)\times(x+1)$$

C'est-à-dire : $(x+1)^{N+1} \geq Nx^2 + (N+1)x + 1$.

Comme $Nx^2 \geq 0$, il vient $Nx^2 + (N+1)x + 1 \geq (N+1)x + 1$ et, finalement :

$$(x+1)^{N+1} \geq (N+1)x + 1$$

$\mathscr{P}_{N+1}$ est donc vraie.

<u>Conclusion</u>

Pour tout entier naturel *n* non nul, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1\,;+\infty[,\ (x+1)^n \geq nx + 1$$