Synthèse de cours (Terminale S)
→ Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

Fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
On dira que « la fonction f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) » s'il existe un réel A tel que l'intervalle $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$) soit inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Limite d'une fonction en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

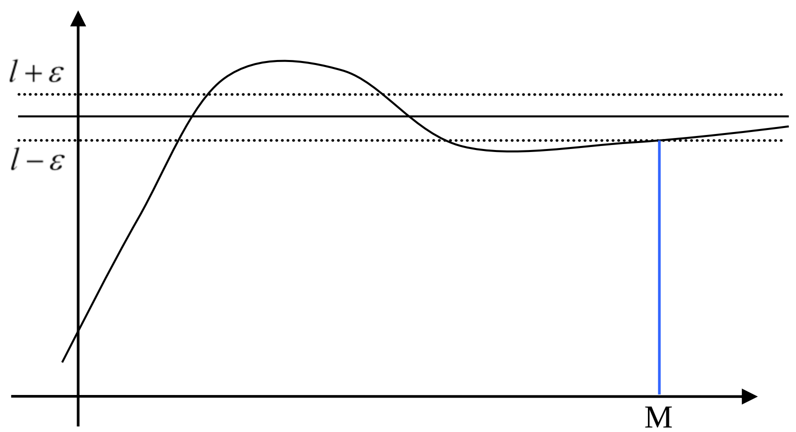
Cas d'une limite finie

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) sur $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$).

On dira que la fonction f admet une limite l en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$ ($\varepsilon>0$), il existe un réel M de $]A;+\infty[$ (resp. de $]-\infty;A[$) tel que pour tout x supérieur (resp. inférieur) à M, on a $f(x)\in]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{resp. } -\infty)}} f(x)=l$$

Interprétation géométrique (voir ci-dessous) : dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction f admet au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) une asymptote horizontale d'équation $y=l$.



Exemples classiques : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-a} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-a} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0$.

Cas d'une limite infinie

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
On suppose que *f* est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On dira que la fonction *f* admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout réel B, il existe un réel M de $\mathcal{D}_f$ tel que pour tout *x* supérieur (resp. inférieur) à M, on a $f(x) > \text{B}$ (resp. $f(x) < \text{B}$). On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (\text{resp. } -\infty)}} f(x) = +\infty \ (\text{resp. } -\infty)$$

Interprétation de la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: pour tout réel (sous-entendu arbitrairement grand), il existe une valeur de l'ensemble de définition de la fonction au-delà de laquelle <u>toutes les valeurs</u> prises par la fonction seront supérieures au réel considéré (de fait, une telle fonction ne sera pas majorée !). Attention ! Ce qui précède n'implique en rien que la fonction soit croissante ! On pourra par exemple considérer, pour s'en convaincre, la fonction : $x \mapsto 2x + 5 - 7\frac{\sin x}{x}$.

Notion d'asymptote oblique

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
On suppose que *f* est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

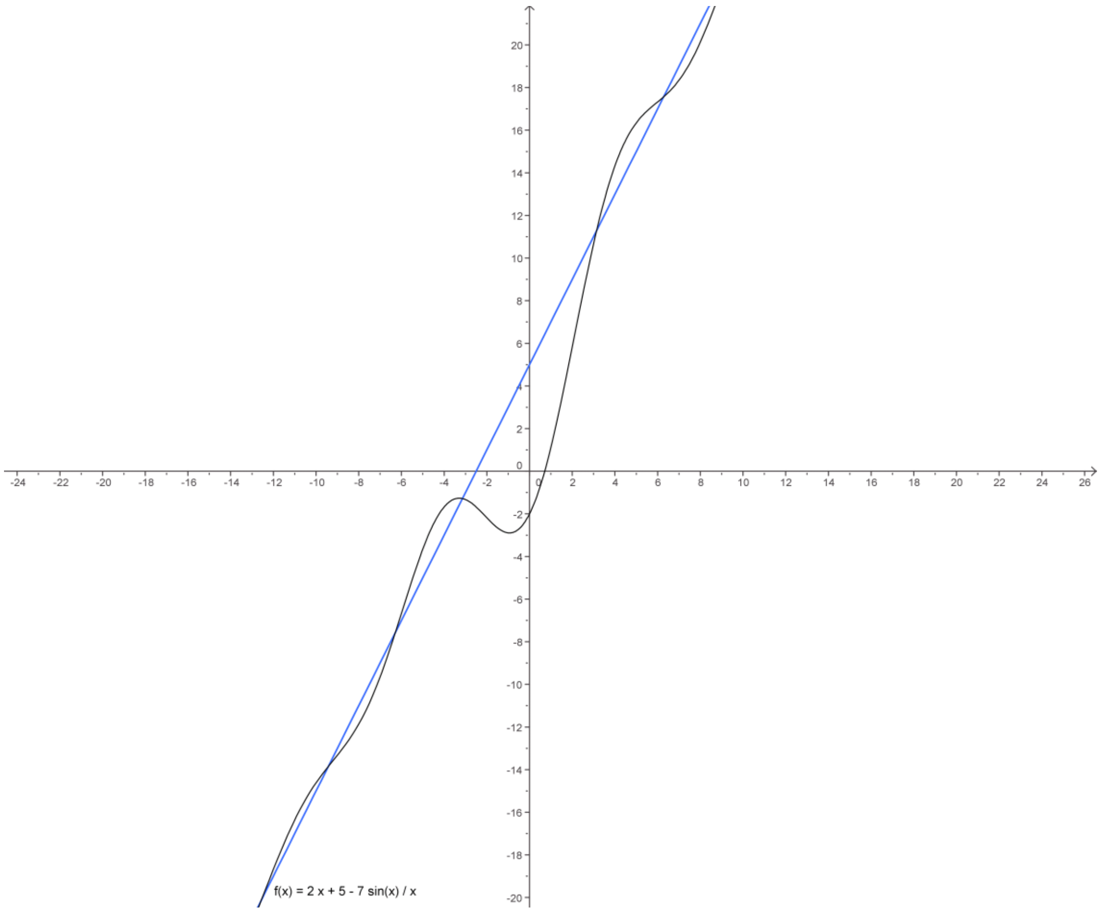
On dira que la fonction *f* admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une asymptote oblique Δ d'équation $y = ax + b$ (ou « que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ») si on a :

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (\text{resp. } -\infty)}} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$$

Remarques :

- Lorsqu'elle existe, l'asymptote est unique !
- Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ, on étudie le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$ (cette étude se fait, à priori, sur $\mathcal{D}_f$).

Attention ! Ce signe n'a aucun raison d'être constant. La fonction ci-dessus admet la droite d'équation $y = 2x + 5$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ mais la différence change périodiquement de signe … (cf. la figure ci-dessous)



La fonction $f : x \mapsto 2x + 5 - 7\dfrac{\sin x}{x}$ *et son asymptote oblique d'équation* $y = 2x + 5$.

Limite d'une fonction en un réel

Cas d'une limite finie

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et soit a un réel.

On suppose qu'il existe un réel strictement positif r tel que $\left]a - r; a + r\right[- \{a\} \subset \mathcal{D}_f$ (on note que la fonction f n'est pas nécessairement définie en a. On dit que « f est définie dans un voisinage de a sans nécessairement être définie en a »).

On dira que la fonction f admet une limite finie l en a si pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel strictement positif α tel que si $x \in \left]a - \alpha; a + \alpha\right[\cap \left(\left]a - r; a + r\right[- \{a\}\right)$ alors on aura $f(x) \in \left]l - \varepsilon; l + \varepsilon\right[$. On écrit alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Exemples classiques : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$, … (On notera que ces limites correspondent en fait à des nombres dérivés).

Remarques :

- On définira de façon similaire les (éventuelles) limites à droite et à gauche de *f* en *a*. On écrira alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ pour la limite à gauche.

  Par exemple, la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ admet une limite à droite en $a=2$ mais n'admet pas de limite à gauche en ce réel.

  On remarquera également que l'existence de ces deux limites n'implique en rien leur égalité (considérer la fonction partie entière en un réel $a\in\mathbb{Z}$) ;
- Enfin, on peut avoir $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)\neq f(a)$.

Cas d'une limite infinie

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et soit *a* un réel.
On suppose qu'il existe un réel strictement positif *r* tel que $]a-r;a+r[-\{a\}\subset\mathcal{D}_f$ (on note que la fonction *f* n'est pas nécessairement définie en *a*. On dit que « *f* est définie dans un voisinage de *a* sans nécessairement être définie en *a* »).

On dira que la fonction *f* admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en *a* si pour tout réel B, on peut trouver un réel strictement positif α tel que si $x\in]a-\alpha;a+\alpha[\cap(]a-r;a+r[-\{a\})$ alors on aura $f(x)>\mathrm{B}$ (resp. $f(x)<\mathrm{B}$). On écrit alors :

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ (resp. } -\infty\text{)}$$

Remarque : comme précédemment, on peut « seulement » avoir une limite infinie à gauche et/ou à droite de *a*. On considèrera, à titre d'illustration, l'exemple suivant : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Interprétation géométrique. Si *f* admet un limite infinie en *a* (resp. à gauche, à droite), on dit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction *f* admet en *a* (resp. à gauche de *a*, à droite de *a*) une asymptote verticale d'équation $x=a$.

Exemples classiques : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$.

Calcul de limites

Opérations et limites

Conventions de calcul

Pour simplifier certains calculs de limites, on introduit les « nombres » $-\infty$ et $+\infty$ avec les règles de calcul suivantes :

Addition

- $+\infty+(+\infty)=+\infty$;
- $-\infty+(-\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R},\ a+(+\infty)=+\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R},\ a+(-\infty)=-\infty$;
- Opposé : $-(+\infty)=-\infty$ et $-(-\infty)=+\infty$.

→ le calcul « $+\infty-(+\infty)$ » n'est pas défini.

Multiplication

- $+\infty\times(+\infty)=+\infty$;
- $-\infty\times(-\infty)=+\infty$;
- $-\infty\times(+\infty)=+\infty\times(-\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R}^{+*},\ a\times(+\infty)=+\infty$ et $\forall a\in\mathbb{R}^{-*},\ a\times(+\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R}^{+*},\ a\times(-\infty)=-\infty$ et $\forall a\in\mathbb{R}^{-*},\ a\times(-\infty)=+\infty$;
- Inverse : $\dfrac{1}{+\infty}=0$ et $\dfrac{1}{-\infty}=0$.

→ Les calculs « $0\times(+\infty)$ » et « $0\times(-\infty)$ » ne sont pas définis. Il en découle que les calculs « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » ne le sont pas également.

→ Le calcul « $\dfrac{0}{0}$ » n'est pas défini. De façon plus générale, lorsque le dénominateur du rapport de deux fonctions tend vers 0, on se demandera si le signe reste constant (limite de type 0^+ ou 0^-) ou pas (il n'y a aucune raison que ce soit le cas et on pourra considérer la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{(-1)^{\mathrm{E}(x)}\times\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ lorsque x tend vers $+\infty$ pour s'en convaincre.).

Pour simplifier certains énoncés (voir ci-après), on peut poser : $\boxed{\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}}$

Opérations et limites

A partir des conventions de calcul ci-dessus, on peut formellement écrire :

Soit *f* et *g* deux fonctions définies dans un voisinage de *a* (pas nécessairement en *a*), $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $k \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$\lim_{x\to a}(kf)(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Lorsque l'on est confronté à une situation « interdite » (cf. les calculs non définis ci-dessus), on dit que l'on a affaire à une « **forme indéterminée** ».

On retiendra les quatre types fondamentaux de formes indéterminées :

« $\infty - \infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $0 \times \infty$ »

Le cas des fonctions polynômes

Soit *f* une fonction polynôme.
La limite en $\pm\infty$ de *f* est la limite correspondante du terme de plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3+5x^2-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3\right) = -\infty$

Le cas des fonctions rationnelles

Soit *f* une fonction rationnelle.
La limite en $\pm\infty$ de *f* est la limite correspondante du rapport des termes de plus haut degré.

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-4x+7}{5x^3-6x+11} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{5x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{5x} = \frac{2}{5}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+4x+7}{3x^3-2x+11} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{3x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+6x^3-5x+23}{3x^3-5x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{3x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{3} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} x = -\infty$$

Comparaison

Soit *f* et *g* deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On suppose qu'il existe un réel A tel que :

- $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_f$ et $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_g$ (resp. $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_f$ et $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_g$) ;
- Pour tout réel $x>\mathrm{A}$ (resp. $x<\mathrm{A}$), on a : $g(x)\leq f(x)$ (resp. $f(x)\leq g(x)$).

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\text{(resp. } \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\text{)}$$

On a également le théorème suivant communément appelé « théorème des gendarmes » :

Soit *f*, *g* et *h* trois fonctions définies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

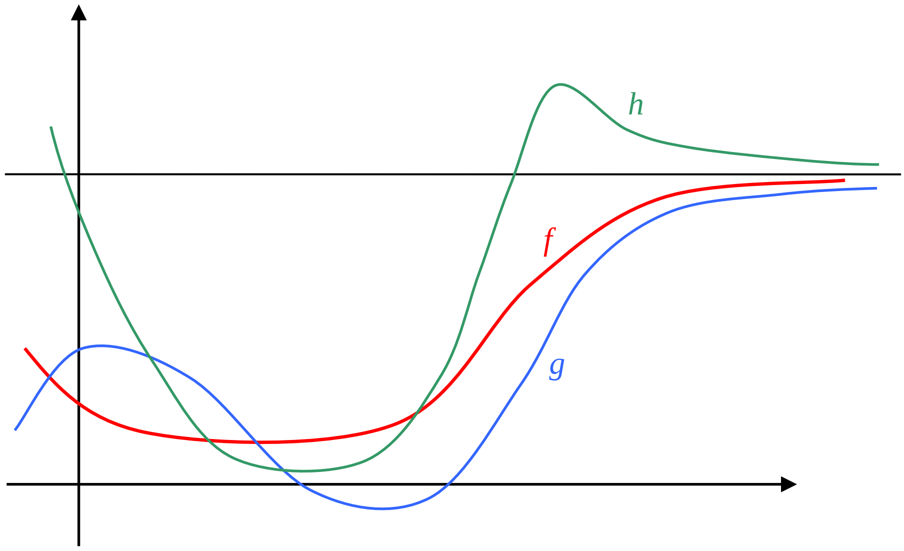
On suppose qu'il existe un réel A tel que :

- $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_f$, $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_g$ et $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_h$ (resp. $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_f$, $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_g$ et $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_h$) ;
- Pour tout réel $x>\mathrm{A}$ (resp. $x<\mathrm{A}$), on a : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$.

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=l$$

$$\text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} h(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=l\text{).}$$



Théorème des gendarmes.
Exemple de courbes représentatives des fonctions f (rouge), g (bleu) et h (vert).

Limite d'une fonction composée

Soit f et g deux fonctions.
Soit a, b et l trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que :

- La fonction f est définie dans un voisinage de a et $\lim_{x \to a} f(x) = b$;
- La fonction g est définie dans un voisinage de b et $\lim_{X \to b} g(X) = l$.

Alors on a :

$$\lim_{x \to a} (gof)(x) = l$$

Exemples :

→ On cherche : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5}}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5}}$ peut être considérée comme la composée de la fonction $f : x \mapsto \frac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5}$ et de la fonction $g : X \mapsto \sqrt{X}$.

On a alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^4}{7x^4} = \frac{4}{7}$. On cherche alors : $\lim_{X \to \frac{4}{7}} g(X)$.

On a : $\lim_{X \to \frac{4}{7}} g(X) = \lim_{X \to \frac{4}{7}} \sqrt{X} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Finalement : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5}} = \frac{2}{\sqrt{7}}}$

→ On cherche : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[5\cos(2x) + 7\cos x - 3 \right]$.

On peut écrire : $5\cos(2x) + 7\cos x - 3 = 5\left(2\cos^2(x) - 1\right) + 7\cos x - 3 = 10\cos^2(x) + 7\cos x - 8$.

La fonction $x \mapsto 5\cos(2x) + 7\cos x - 3$ peut alors être considérée comme la composée des fonctions : $f : x \mapsto \cos x$ et $g : X \mapsto 10X^2 + 7X - 8$.

On a alors : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. On cherche alors : $\lim_{X \to 0} g(X)$.

On a immédiatement : $\lim_{X \to 0} g(X) = \lim_{X \to 0} \left(10X^2 + 7X - 8\right) = -8$.

Finalement : $\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[5\cos(2x) + 7\cos x - 3 \right] = -8}$.