Fonction logarithme népérien.

Corrigés d'exercices

Version du 25/01/2015

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°21 page 164

$a = \ln\left(e^2\right) = \boxed{2}$ (en utilisant directement $\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(e^x\right) = x$).

$b = \ln\left(e^{-3}\right) = \boxed{-3}$ (idem).

$c = e^{\ln 5} = \boxed{5}$ (en utilisant directement $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$).

$d = e^{-\ln 3} = \dfrac{1}{e^{\ln 3}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ (idem) ou $d = e^{-\ln 3} = e^{\ln\frac{1}{3}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ (en utilisant d'abord $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -\ln x = \ln\dfrac{1}{x}$).

$e = e^{2\ln 7} = \left(e^{\ln 7}\right)^2 = 7^2 = \boxed{49}$ ou $e = e^{2\ln 7} = e^{\ln 7^2} = e^{\ln 49} = \boxed{49}$.

$f = e^{-3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-3} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$ ou $f = e^{-3\ln 2} = e^{\ln 2^{-3}} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$.

N°22 page 164

a. $\ln x = 3$

On résout cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$ (domaine de définition de la fonction logarithme népérien).

On a : $\ln x = 3 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^3 \Leftrightarrow x = e^3$ qui est strictement positif.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{e^3\right\}}$$

b. $2\ln x + 6 = 0$

On résout cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$ (domaine de définition de la fonction logarithme népérien).
On a : $2\ln x+6=0 \Leftrightarrow \ln x=-3 \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{-3} \Leftrightarrow x=e^{-3}$ qui est strictement positif.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{e^{-3}\right\}}$$

c. $1-4\ln x=\ln x-9$
On résout cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$ (domaine de définition de la fonction logarithme népérien).
On a : $1-4\ln x=\ln x-9 \Leftrightarrow 5\ln x=10 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{2} \Leftrightarrow x=e^{2}$ qui est strictement positif.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{e^{2}\right\}}$$

d. $(\ln x)^2=1$
On résout cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$ (domaine de définition de la fonction logarithme népérien).
On a : $(\ln x)^2=1 \Leftrightarrow (\ln x)^2-1=0 \Leftrightarrow (\ln x-1)(\ln x+1)=0 \Leftrightarrow \ln x-1=0$ ou $\ln x+1=0$.
On a alors :

- $\ln x-1=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$.
- $\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{e}\,;e\right\}}$$

N°24 page 164

a. $\ln(x+2)=\ln 2$
On doit avoir $x+2>0$, c'est-à-dire $x>-2$. On résout donc cette équation dans l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
Pour tout x strictement supérieur à -2, on a : $\ln(x+2)=\ln 2 \Leftrightarrow x+2=2 \Leftrightarrow x=0$ qui appartient bien à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\{0\}}$$

b. $\ln(2x-5)=1$

On doit avoir $2x-5>0$, c'est-à-dire $x>\frac{5}{2}$. On résout donc cette équation dans l'intervalle $\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

Pour tout x strictement supérieur à $\frac{5}{2}$, on a :

$\ln(2x-5)=1 \Leftrightarrow \ln(2x-5)=\ln e \Leftrightarrow 2x-5=e \Leftrightarrow x=\frac{e+5}{2}$ qui appartient bien à l'intervalle $\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{e+5}{2}\right\}}$$

c. $4\ln(1-x)=8$

On doit avoir $1-x>0$, c'est-à-dire $x<1$. On résout donc cette équation dans l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

Pour tout x strictement inférieur à 1, on a :

$4\ln(1-x)=8 \Leftrightarrow \ln(1-x)=2 \Leftrightarrow \ln(1-x)=\ln e^2 \Leftrightarrow 1-x=e^2 \Leftrightarrow x=1-e^2$ qui appartient bien à l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{1-e^2\right\}}$$

d. $\ln(3x+8)=\ln x$

On doit avoir $3x+8>0$ et $x>0$, c'est-à-dire $\begin{cases}3x+8>0\\ x>0\end{cases}$.

Or : $\begin{cases}3x+8>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\frac{8}{3}\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0$

On résout donc cette équation dans l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout x strictement supérieur à 0, on a :

$\ln(3x+8)=\ln x \Leftrightarrow 3x+8=x \Leftrightarrow 2x=-8 \Leftrightarrow x=-4$ qui n'est pas strictement positif.

$$\boxed{\mathscr{S}=\varnothing}$$

N°39 page 165

$a=\ln 12=\ln(4\times 3)=\ln\left(2^2\times 3\right)=\ln 2^2+\ln 3=\boxed{2\ln 2+\ln 3}$

$b=\ln\sqrt{8}=\frac{1}{2}\ln 8=\frac{1}{2}\ln 2^3=\boxed{\frac{3}{2}\ln 2}$

$c=\ln 9=\ln 3^2=\boxed{2\ln 3}$

$d=\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\boxed{\ln 3-\ln 2}$

$e=\ln\left(2\sqrt{e}\right)=\ln 2+\ln\sqrt{e}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln e=\boxed{\ln 2+\frac{1}{2}}$ (les notations de l'énoncé sont ici plus que malvenues…)

$f=\ln\left(\frac{9}{e}\right)=\ln 9-\ln e=\ln 3^2-1=\boxed{2\ln 3-1}$

N°42 page 165

$a=\ln 4+\ln 5=\ln(4\times 5)=\boxed{\ln 20}$

$b=\ln 6-\ln 7=\boxed{\ln\frac{6}{7}}$

$c=\frac{1}{2}\ln 3-\ln 5=\ln\sqrt{3}-\ln 5=\boxed{\ln\frac{\sqrt{3}}{5}}$

$d=2\ln 6=\ln 6^2=\boxed{\ln 36}$

$e=-\ln 2+1=\ln\frac{1}{2}+\ln e=\ln\left(\frac{1}{2}\times e\right)=\boxed{\ln\frac{e}{2}}$

$f=3\ln 5+\frac{1}{2}=\ln 5^3+\frac{1}{2}\ln e=\ln 125+\ln\sqrt{e}=\boxed{\ln\left(125\sqrt{e}\right)}$

N°51 page 166

On a :

$$P_n\geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geq 0,99\Leftrightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^n\leq 0,01=10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]\leq\ln 10^{-2}\Leftrightarrow n\ln\frac{5}{6}\leq -2\ln 10\Leftrightarrow n\geq\frac{-2\ln 10}{\ln\frac{5}{6}}$$

$$\Leftrightarrow n\geq\frac{-2\ln 10}{\ln 5-\ln 6}$$

Comme $\frac{-2\ln 10}{\ln 5-\ln 6}\simeq 25,26$, on en déduit que le nombre minimal de lancers pour que l'on ait $P_n\geq 0,99$ est $n=26$.

Vérifions :

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{25}\simeq 0,989\,517$$
$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{26}\simeq 0,991\,265$$

N°59 page 168

1. Commençons par les limites.
   On a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{2}{x}=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{différence}}{\Rightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\ln x-\frac{2}{x}\right)=-\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\ln x-\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}g(x)=-\infty}$$

   De façon analogue :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\end{array}\right\}\overset{\text{différence}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$$

   Voyons maintenant pourquoi la fonction *g* s'annule sur $]0\,;+\infty[$ en une unique valeur x_0 comprise entre 2,3 et 2,4.

   La fonction *g* est dérivable, et donc continue, sur $]0\,;+\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (fonction logarithme népérien et, au facteur multiplicatif 2 près, la fonction inverse). Pour tout réel *x* strictement positif, on a :

$$g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$$

Comme x est strictement positif, on a immédiatement $\frac{1}{x} > 0$, $\frac{2}{x^2} > 0$ et donc $g'(x) > 0$.

Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Enfin, on a vu précédemment : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, on peut conclure que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. Nous la notons : x_0.

On a : $g(2,3) = \ln(2,3) - \frac{2}{2,3} \simeq -0,036\,7 < 0$ et $g(2,4) = \ln(2,4) - \frac{2}{2,4} \simeq 0,042\,1 > 0$.

On en déduit finalement :

La fonction g s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ en une unique valeur x_0 comprise, strictement, entre 2,3 et 2,4.

2. D'après la question précédente, on a : $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire : $\ln x_0 = \frac{2}{x_0}$.

   Il vient alors : $f(x_0) = \frac{5\ln x_0}{x_0} = \frac{5 \times \frac{2}{x_0}}{x_0} = 5 \times \frac{2}{x_0} \times \frac{1}{x_0} = \frac{10}{x_0^2}$.

$$\boxed{f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}}$$

N°54 page 167

1. Dérivation d'un produit : $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \boxed{\ln x + 1}$
2. Dérivation d'un rapport : $f'(x) = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \boxed{\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}}$
3. Dérivation de la puissance d'une fonction : $f'(x) = 2 \times \ln x \times \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2\ln x}{x}}$
4. Dérivation d'un produit : $f'(x) = \frac{1}{x} \times \sin x + \ln x \times \cos x = \boxed{\frac{\sin x}{x} + \ln x \times \cos x}$

N°65 page 169

a. Le premier terme de la suite (u_n) est strictement positif et sa raison est strictement supérieure à 1. On en conclut immédiatement que la suite (u_n) est (strictement) croissante.

On peut redétailler …

Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = u_0 \times q^n = \frac{4}{5}\times 1,2^n$.

Il vient donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}\times 1,2^{n+1} - \frac{4}{5}\times 1,2^n = \frac{4}{5}\times 1,2^n \times (1,2-1) = \frac{4}{5}\times 1,2^n \times 0,2$ et on a immédiatement : $\frac{4}{5}\times 1,2^n \times 0,2 > 0$. D'où le résultat.

La suite (u_n) est (strictement) croissante.

b. On a : $u_n \geq 100 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\times 1,2^n \geq 100 \Leftrightarrow 1,2^n \geq 100 \times \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1,2^n \geq 125 \Leftrightarrow n\ln 1,2 \geq \ln 125$.

Comme $1,2 > 1$, on a $\ln 1,2 > 0$ d'où : $n\ln 1,2 \geq \ln 125 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 125}{\ln 1,2}$.

Comme $\frac{\ln 125}{\ln 1,2} \simeq 26,5$ on aura $u_n \geq 100$ pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 27.

$u_n \geq 100$ pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 27.

N°72 page 170

On pose $X = \ln x$.
On a donc, en considérant les exponentielles : $e^X = e^{\ln x} = x$.
Alors : $\frac{x}{(\ln x)^2} = \frac{e^X}{X^2}$ puis : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X^2}$.

On ne peut conclure directement, la limite classique : $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$, pour tout *n* entier naturel, n'étant officiellement plus au programme.
Classiquement, le dénominateur étant un carré, on fait apparaître un carré au numérateur :

$$\frac{e^X}{X^2} = \frac{e^{2\times\frac{X}{2}}}{X^2} = \frac{\left(e^{\frac{X}{2}}\right)^2}{X^2} = \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{X}\right)^2 = \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{2\times\frac{X}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}\times\left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\frac{X}{2}}\right)^2$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty\ (\text{croissance comparée})\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{X}{2}}}{\frac{X}{2}}=+\infty\\ \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{4}\alpha^2=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{\frac{X}{2}}}{\frac{X}{2}}\right)^2=+\infty$$

On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(\ln x)^2}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X^2}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{\frac{X}{2}}}{\frac{X}{2}}\right)^2=+\infty$.

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(\ln x)^2}=+\infty}$$

N°86 page 173

1. VRAI

   Pour tout entier naturel n non nul, on a :

   $$f_n(1)=1^n\times\ln(1+1)=1\times\ln 2=\ln 2$$

   On en déduite donc que pour tout entier naturel non nul n, le point $\mathrm{A}(1;\ln 2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

2. VRAI

   On a d'abord : $u_1=f_1(2)=2^1\times\ln(1+2)=2\ln 3$.
   Puis : pour tout entier naturel non nul n, on a :

   $$u_n=f_n(2)=2^n\times\ln 3=2\ln 3\times 2^{n-1}=u_1\times 2^{n-1}$$

   On en déduit immédiatement que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_1=2\ln 3$.

3. VRAI

Pour tout entier naturel non nul *n*, on a :

$$f'_n(x) = n\,x^{n-1} \times \ln(x+1) + x^n \times \frac{1}{x+1}$$

D'où : $f'_n(0) = n \times 0^{n-1} \times \underbrace{\ln(0+1)}_{=0} + \underbrace{0^n}_{=0} \times \frac{1}{0+1} = 0$.

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est toujours nul : la tangente est horizontale.

4. FAUX

Pour tout entier naturel non nul *n* et tout *x* dans l'intervalle $[0\,;1]$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}\ln(x+1) - x^n\ln(x+1) = x^n\ln(x+1)\times(x-1)$$

- $x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0$.
- $x \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq 0$.
- $x \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq 0$.

En définitive, pour tout *x* dans l'intervalle $[0\,;1]$, on a : $x^n\ln(x+1)\times(x-1) \leq 0$, soit $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.

N°90 page 174

1. Soit *a* un réel quelconque fixé.
   Pour tout réel *x* strictement positif, on a :

$$f_a(x) = (\ln x + a) \times \frac{1}{x}$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a = a \end{array}\right\} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x + a) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{produit}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[(\ln x + a)\times\frac{1}{x}\right] = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_a(x) = -\infty}$$

On a aussi : $f_a(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{a}{x}$. D'où :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (croisssance comparée)} \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{a}{x} \right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = 0}$$

2. La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel strictement positif *x*, on a :

$$f_a'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x + a) \times 1}{x^2} = \frac{-\ln x - a + 1}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a'(x) = \frac{-\ln x - a + 1}{x^2}}$$

3. Comme $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$, le signe de $f_a'(x)$ est celui de $-\ln x - a + 1$.
   On a : $-\ln x - a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq -a + 1 \Leftrightarrow x \leq e^{-a+1}$.
   On en déduit immédiatement :
   - Pour tout réel *x* de $\left]0 ; e^{-a+1}\right]$, on a : $f_a'(x) \geq 0$ et la fonction f_a est croissante.
   - Pour tout réel *x* de $\left[e^{-a+1} ; +\infty\right[$, on a : $f_a'(x) \leq 0$ et la fonction f_a est croissante.

   On en déduit immédiatement que la fonction f_a admet un maximum en $x_a = e^{-a+1}$ et on a : $y_a = f(x_a) = \dfrac{\ln\left(e^{-a+1}\right) + a}{e^{-a+1}} = \dfrac{-a + 1 + a}{e^{-a+1}} = \dfrac{1}{e^{-a+1}} = e^{a-1}$.

   $$\boxed{\text{La fonction } f_a \text{ admet un maximum en } x_a = e^{-a+1} \text{ et on a : } y_a = f(x_a) = e^{a-1}.}$$

4. Comme on l'a vu précédemment, on a : $y_a = f(x_a) = \dfrac{1}{e^{-a+1}} = \dfrac{1}{x_a}$. Ainsi, le point $A(x_a ; y_a)$ appartient à la courbe représentative de la fonction inverse.

Le point $A(x_a\ ;\ y_a)$ appartient à la courbe représentative de la fonction inverse.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives de quelques fonctions f_a pour $a=-\frac{1}{2}$, 0, 1 et 2. Pour une valeur de a donnée, le sommet de la courbe est noté S_a. En bleu, on a fait apparaître la partie de la courbe représentative de la fonction inverse correspondant aux abscisses strictement positives.